

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



**Гірничий факультет**  
кафедра транспортних систем і технологій

М.О. Лубенець, Є.А. Коровяка, Т.М. Лубенець.

**МЕТРОЛОГІЯ, СТАНДАРТИЗАЦІЯ ТА СЕРТИФІКАЦІЯ.  
ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МЕТРОЛОГІЇ НА ТРАНСПОРТІ**

для студентів напряму підготовки 6.050301 «Гірництво»

Навчальний посібник

для студентів спеціальності  
6.090301 *Гірництво*  
(бакалавр, магістр)

Дніпропетровськ  
ДВНЗ «НГУ»  
2018

УДК 006 (075)

Затверджено до видання редакційною радою ДВНЗ «НГУ» (протокол № 3 від XX.XX.XXXX) за поданням методичної комісії напряму підготовки 6.050301 «Гірництво» (протокол № 12 від XX.XX.XXXX).

**Рецензенти:**

..... – .....

..... – .....

Лубенець М.О.

Метрологія, стандартизація та сертифікація. Збірник задач з метрології на транспорті: навч. посіб. / М.О. Лубенець, Є.А. Коровяка, Т.М. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». – Д., ДВНЗ «НГУ», 2012018. – 101 с.

**Автори:**

Лубенець, М.О., канд. техн. наук, доц.. (розділи 1-4);

Коровяка Є.А., канд. техн. наук, доц. (розділи 1-4):

Лубенець, Т.М., аспірант (розділ 1-2).

В навчальному посібнику приведені різноманітні задачі, які пов'язані з експлуатацією і проектуванням транспортних машин гірничих підприємств. Вони стосуються вимірювання параметрів насипних вантажів, вантажо й газових потоків, транспортних засобів й прогнозування характеристик експлуатації транспортних машин в різних умовах та визначення похибок вимірювань.

Особливу увагу в посібнику приділено задачам непрямого вимірювання та прогнозу параметрів транспортних машин у зв'язку з новими уявленнями в області тертя тіл і розрахунку параметрів експлуатації машин.

Призначено для студентів гірничо-транспортного та нафто-газового профілю.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри транспортних систем і технологій, д-р техн. наук, проф.. Л.Н. Ширін

# ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА</b>	<b>4</b>
<b>1. ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ТРАНСПОРТНИХ МАШИН</b>	<b>7</b>
1.1. Нові уявлення тертя тіл	7
1.2. Новий метод визначення параметрів експлуатації стрічкового конвейера	13
1.3. Новий метод визначення параметрів експлуатації самохідної машини й поїзда в період гальмування	21
<b>2. ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ</b>	<b>24</b>
2.1. Загальні відомості про вимірювання	24
2.2. Відомості про похибку вимірювання	25
2.3. Приклади задач	27
<b>3. ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ</b>	<b>55</b>
3.1. Усунення інструментальної систематичної похибки	55
3.2. Усунення методичної систематичної похибки	55
3.3. Експериментальне виключення систематичної похибки	55
3.4. Приклади задач	56
<b>4. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ</b>	<b>72</b>
4.1. Загальні відомості	72
4.2. Перевірка статистичного розподілу випадкової величини	73
4.3. Приклади задач	75
<b>ВИСНОВКИ</b>	<b>101</b>
<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА</b>	<b>102</b>

## ПЕРЕДМОВА

Приведені в посібнику задачі пов'язані з експлуатацією і проектуванням транспортних машин гірничих підприємств. Вони стосуються вимірювання параметрів насипних вантажів, вантажопотоків й газових потоків, транспортних засобів, прогнозування характеристик експлуатації транспортних машин в різних умовах, визначення похибок вимірювань та їх стандартизації [1-35].

В практиці розв'язання задач проектування, виготовлення та експлуатації транспортних машин важливе значення мають такі їх параметри, як коефіцієнт опору руху (питомий опір руху), тягове зусилля, параметри руху машин та ін. [7-9]. Ці параметри зумовлені фрикційними властивостями привідних блоків та двигателів транспортних машин, їх завантаженням, характеристиками траси та умовами їх експлуатації і впливають на їх тягову спроможність, у тому числі, параметри руху самохідних машин [7-35].

Вказані параметри завжди вимірюються експериментально і за допомогою них прогнозуються характеристики експлуатації самохідних та стаціонарних транспортних машин [7-9].

Для експериментального визначення цих параметрів проводять випробування транспортних засобів, його елементів та матеріалів. Умови випробування дуже різноманітні: швидкість руху транспортного засобу чи тягового органу, маса вантажу, кліматичні умови випробування (наприклад, температура та вологість навколишнього середовища), характеристика траси та ін [1,3,5,7-9].

Методи вимірювання фізичних величин разом з умовами випробування впливають на похибки визначення параметрів транспортних машин. Тому точність з якою задаються умови випробування, змінність інших впливових параметрів машин чи їх умови експлуатації безпосередньо впливають на достовірність визначення та прогнозування розшукуваних параметрів.

Знаходження і прогнозування різноманітних параметрів транспортних машин підлягають загальним принципам вимірювання і правилам обробки результатів вимірювання, що використовуються в посібнику [1-6].

В посібнику, у тому числі, особливу увагу приділено задачам непрямого вимірювання та прогнозу параметрів стаціонарних транспортних машин з гнучким тяговим органом та параметрів руху самохідних машин, тому що діючі методи вимірювання недосконалі. Тому діючі методи вимірювання включають методичну складову систематичної похибки [1-9].

Ці похибки, зокрема, пов'язані зі спрощеннями діючих уявлень про тертя гнучких тіл, методів розрахунку параметрів експлуатації стаціонарних транспортних машин з гнучким тяговим органом та руху самохідних машин й поїздів в режимі гальмування, що доведено на кафедрі ТСТ. Були, також, обґрунтовані нові уявлення тертя гнучких тіл і запропоновані відповідні методи вимірювання та розрахунку параметрів експлуатації транспортних машин [10-35].

В таблиці приведені одиниці фізичних величин в системі СІ, які використовуються при розв'язанні задач.

Таблиця

Символи одиниць фізичних величин

Фізичні величини	Одиниці	
	символ	позначення
Довжина	$L$	$m$
Маса	$m$	$kg$
Площа	$s$	$m^2$
Час	$T, t$	$s$
Сила електричного току	$I$	$a$
Продуктивність	$Q$	$kg/s$
Вантажопідємність, вага, сила тяжіння	$G$	$H$
Вага самохідної машини	$P$	$H$
Сила опору руху	$W$	$H$
Коефіцієнт опору руху	$w$	
Тягова сила двигуна	$F_{\delta}$	$H$
Коефіцієнт запаса тягової спроможності	$k_T$	
Момент сили	$M$	$Na$
Сила тяги для переміщення вантажу	$F$	$H$
Потужність	$N$	$Bm$
Перевантажувальна спроможність	$\lambda$	
К.к.д.	$\eta$	
Швидкість руху	$v$	$m/s$
Прискорення	$a$	$m/a^2$
Прискорення вільного падіння	$g$	$m/a^2$
Тягова сила двигателя	$F_k$	$H$
Тягова сила тягового блоку	$F_0$	$H$
Гальмова сила	$B$	$H$
Натягування гнучкого тягового органу	$S$	$H$
Коефіцієнт тертя	$f$	
Сила тертя	$F$	$H$
Кут обхвату блока гнучким тілом	$\varphi$	$rad$
Нормальна реакція між тілами	$N$	$H$
Відцентрові сили	$C$	$H$
Складова відцентрових сил	$C_x$	$H$
Гравітаційні сили	$G$	$H$
Складова гравітаційної сили	$G_x$	$H$
Реакція на блоці	$R$	$H$
Складова реакції на блоці	$R_x$	$H$
Коефіцієнт зчеплення	$\mu$	
Запас міцності	$n$	
Ухил траси	$i, \%$	$promili$

Ухил траси	$i$	
Передавальне відношення	$i$	
Частота обертання	$\omega$	$s^{-1}$
Щільність	$\rho$	$kg/m^3$
Інтенсивність відмов	$\lambda$	

**Примітка:**

В навчальному посібнику позначення фізичних величин можуть використовуватись з уточнюючими індексами.

# 1. ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ТРАНСПОРТНИХ МАШИН.

## 1.1. Нові уявлення про тертя тіл.

У народному господарстві для транспортування вантажів широко використовуються самохідні та стаціонарні транспортні машини. До них відносяться: локомотиви, автомобілі, стрічкові конвеєри, надгрунтові дороги, лебідки, підйомні машини, підвісні дороги та багато ін. [7-9].

Проектування і експлуатація транспортних машин у народному господарстві передбачає визначення і обґрунтування раціональних режимів їх роботи, у тому числі прогнозування тягової спроможності машин, яка визначається у відповідності до діючих законів природознавства в області тертя тіл: закону тертя (негнучких) тіл Кулона 1779 р. та закону (рівняння) тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р., сутність яких надто не схожа між собою [7-27].

Одночасна дія в одній області природничих знань - області тертя тіл неподібних між собою законів тертя гнучкого та негнучкого тіла не є беззаперечним, переконливим, обґрунтованим та логічним і підсилює наші сумніви щодо правильності, як мінімум, одного з цих законів [23,24,26,27].

До речі, дослідники давно помітили подібність багатьох законів навколишнього світу, що описують взаємодію факторів впливу різних явищ. Наприклад, взаємодію в електро-магнітному та гравітаційному полях, молекулярну, ядерну чи заємодію часток матерії в уявленнях квантової фізики. Ці загальні риси вказаних діючих законів та уявлень природознавства, очевидно, свідчать про їх правильність [23,24].

До речі, одна з останніх робіт А. Ейнштейна була, як раз, присвячена створенню єдиної теорії поля, що продовжує хвилювати вчених в різних областях природознавства у всьому світі.

Уявлення про тертя тіл також має спільні риси з іншими явищами природи. Наприклад, подібність уявлень про зовнішнє тертя негнучких тіл (закони тертя тел Леонардо да Вінчі, Амонтоні і Кулона) з внутрішнім тертям в тілі (теорія міцності гірських порід Кулона-Мора), деформацію тіл (закон Гука), рухом газів та рідин (рівняння Бернуллі), проходження по тілу електричного струму (закон Ома) та ін [23,24,26].

Що стосується однієї області знань - області тертя тіл, то в ній і подавно очікується дія єдиного загального закону тертя. Але доки нашими попередниками його не було обґрунтовано. Тому на сьогодні діють несхожі та неподібні між собою закони тертя негнучких та гнучких тіл [23,24].

Проведений аналіз суджень філософів і авторів відомих законів тертя тіл (Аристотеля - 5 ст. до Н.Е., Леонардо да Вінчі - 15 ст. Н.Е., Амонтоні - 1699 р., самого Ейлера - 1775 р. і Кулона - 1779 г.) свідчить про те, що всі закони тертя негнучких тіл містять загальні фактори впливу - силу тертя і нормальну реакцію між тілами, які лінійно пов'язані між собою [23-24].

Але, закон (рівняння) тертя гнучких тіл Ейлера виходить за межі встановленого загального характеру законів тертя негнучких тіл.

Як відомо, гальмова та тягова здатність стаціонарної машини з гнучким тяговим органом (гнучким тілом) реалізується тертям гнучкого тіла по її привідному блоці за рахунок його притиснення до блоку під дією зусиль натягування. Сили тяги та гальмування машини прогноуються відповідно до чинного закону тертя гнучких тіл - рівняння тертя гнучких тіл Ейлера за умовою натягування гнучкого тіла, але, чомусь,

тільки на одному з контактів з привідним блоком машини, що збуджує сумніви в його правильності [7-9].

Розглянемо розрахункову схему, рис. 1.1.

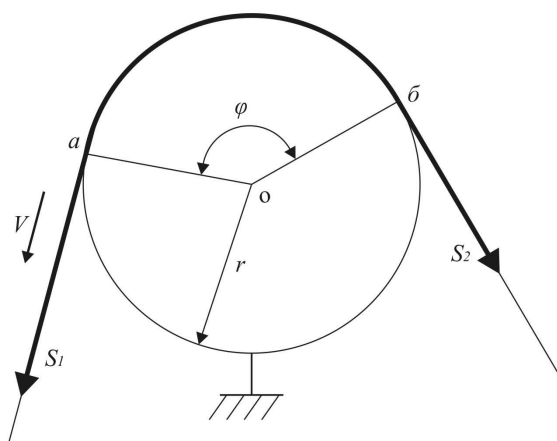


Рис. 1.1. Розрахункова схема:  $S_1$ ,  $S_2$  - більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла (натягання в збігаючій й набігаючій на блок гілках гнучкого тіла) при ковзанні;  $r$  - радіус блоку;  $\varphi$  - кут обхвату блоку гнучким тілом;  $v$  - напрямок руху.

Відповідно до рівняння тертя гнучкого тіла Ейлера 1775 г. воно під дією прикладених до її кінців сил  $S_1$ ,  $S_2$  ковзає в напрямку більшої сили, що перевищує іншу силу на величину сумарної сили тертя  $F$ , яка виникає між тілами, а відношення більшої сили до меншої дорівнює:

$$\frac{S_1}{S_2} = e^{f \cdot \varphi}$$

де  $S_1$ ,  $S_2$  - більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла (натягування в збігаючій з блоку й набігаючій на блок гілках гнучкого тіла) при ковзанні;  $f$  - коефіцієнт тертя;  $\varphi$  - кут обхвату блока гнучким тілом.

Однак:

- рівняння Ейлера і розраховані фрикційні характеристики гнучкого тіла за цим рівнянням не узгоджуються з накопиченими даними практики (фактичні параметри тертя тіл не збігаються з розрахунковими);

- рівняння Ейлера та його перетворення ні в явному вигляді, ні опосередковано не містить загальновизнаного фактора тертя тіл, встановленого на протязі століть філософами і вченими - нормальної реакції між тілами  $N$  і не підтверджує її лінійного зв'язку з силою тертя  $F$ .

Тому, виникає сумнів щодо правильності уявлень про тертя гнучких тіл, обґрунтування достовірного методу розрахунку машин з гнучким тяговим органом – зокрема, визначення сил гальмування та тягової спроможності машини і обґрунтування раціональних режимів їх роботи [23-24].

Разом з тим, незважаючи на відмінність між законом (рівнянням) тертя гнучких тіл Ейлера і відомими законами тертя негнучких тіл, невідповідність між ним і даними практики, а також численні спроби видатних дослідників в світі щодо його уточнення, які здійсненні протягом століть, рівняння тертя для ідеального гнучкого тіла - невагомої, нерастяжної і абсолютно гнучкої нитки доки вважається найдосконалішим і правильним [23,24,26,27].

Але це судження є помилковим. Проведені наукові дослідження, у тому числі на



випробувальному стенді-конвеєрі, показали, що рівняння Ейлера не відповідає фундаментальним умовам рівноваги механічної системи на блоці. Згідно з вказаним рівнянням розрахункова реакція  $R_x$  на блоці не врівноважує сили  $S_1$  і  $S_2$ , які прикладені до кінців гнучкого тіла, а реалізоване кругове тягове зусилля  $F_{н-с}$  на ньому не дорівнює різниці цих сил  $S_1 - S_2$ . Також механічна енергія конвейерної стрічки в заданих умовах випробування (у тому числі - потенційна) при варіюванні значень коефіцієнта тертя не змінюється. Ця обставина, зокрема, підтверджує дотримання при роботі стрічкового конвеєра сучасної редакції закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі, яку відкрито у 19 столітті Н.Е., що не реалізується рівнянням Ейлера, яке отримане до цього [26,27].

Тому нами в рамках консервативної механічної системи було запропоновано нове виведення результатів розв'язання класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по нерухомому блоці [18-20].

Нова система диференціальних рівнянь рівноваги гнучкого тіла, в порівнянні з системою рівнянь Ейлера, включає не три, а чотири рівняння. А саме, містить два рівняння рівноваги механічної системи, які були обґрунтовані Ейлером, пануючий зараз закон тертя тіл Кулона (замість застарілого закону Амонтона, запропонованого Ейлером) і введено умову рівноваги натягування гнучкого тіла уздовж лінії контакту з блоком, що відповідає новій редакції закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі, який ще не був відомий вченому [18-20, 23,24,26,27]:

$$\begin{cases} dN = S \cdot da; \\ dS = dF; \\ dF = \frac{F_c}{\varphi} \cdot da + C \cdot dN; \\ \frac{\partial N}{\partial f} = \frac{\partial \left( \int_0^{\varphi} S \cdot da \right)}{\partial f} = 0 \Rightarrow S = S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot a; \end{cases}$$

де  $dN$  - приріст нормальної реакції між елементарною ділянкою гнучкого тіла і блоком;  $da$  - приріст елементарного кута обхвату, який відповідає елементарній ділянці гнучкого тіла;  $dF$  - приріст сили тертя між елементарною ділянкою гнучкого тіла і блоком;  $\alpha$  - кут заданого перетину гнучкого тіла, який має контакт з блоком.

Розв'язання цієї системи диференціальних рівнянь рівноваги гнучкого тіла в класичній задачі Ейлера є новим рівнянням тертя гнучкого тіла – новим законом тертя гнучких тіл:

$$F = S_1 - S_2 = F_c + C \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right) = F_c + C \cdot N.$$

або:

$$F = S_1 - S_2 = \left( \frac{F_c}{N} + C \right) \cdot N = f \cdot N; \text{ де } f = \left( \frac{F_c}{N} + C \right).$$

Оскільки нове рівняння тертя гнучких тіл:

- відповідає даним практики;

- відповідає загальноновизнаним уявленням про тертя тіл – воно в опосередкованому

вигляді містить нормальну реакцію між тілами, яка лінійно пов'язана з силою тертя за допомогою коефіцієнта тертя;

- враховує дію відцентрових сил гнучкого тіла;
- відповідає законам класичної механіки - фундаментальним умовам рівноваги механічної системи, останній редакції закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі, закону Гука та ін..

Нове рівняння гнучких тіл на відміну від рівняння Ейлера узгоджується з накопиченими даними практики (фактичні параметри тертя тіл не збігаються з розрахунковими) і відповідає загальновизнаним уявленням про тертя тіл, встановленим на протязі століть філософами і вченими [23,24, 26,27].

Воно в опосередкованому вигляді включає силу тертя  $F$  і нормальну реакцію між тілами  $N$ , які лінійно пов'язані між собою за допомогою коефіцієнта тертя  $f$ .

Більше того, нове рівняння в опосередкованому вигляді співпало з пануючим зараз законом тертя тіл Кулона, Ця обставина, нарешті, здолала невідповідність між діючими законами в області тертя гнучких та негнучких тіл і свідчить про обґрунтування загального закону тертя. В якості загального закону тертя тіл представляється пануючий зараз закон тертя тіл Кулона, дія якого зараз поширюється на усі тіла, у тому числі на гнучкі [23,24, 26,27].

За новим розв'язанням класичної задачі Ейлера дійсні значення фрикційних характеристик гнучкого тіла по барабану визначаються за формулами:

а) без врахування відцентрових сил:

$$f_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}} = \frac{2 \cdot (S_1 - S_2)}{\varphi \cdot (S_1 + S_2)};$$
$$N_{\delta} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2};$$
$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2;$$
$$F = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$$

а) з врахуванням відцентрових сил:

$$f_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}} = \frac{2 \cdot (S_1 - S_2)}{\varphi \cdot (S_1 + S_2 - 2qv^2)};$$
$$; N_{\delta} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2}$$
$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2;$$
$$F = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$$

де  $q$  – лінійна маса гнучкого тіла;  $v$  - швидкість руху гнучкого тіла.

Для реалізації заданого тягового зусилля або гальмівної сили за новою умовою зчеплення гнучкого тіла з блоком досить забезпечити достатнє зусилля притискання тіл (нормальну реакцію  $N$  між тілами) або сумарне натягування на привідному блоці  $S_1 + S_2$ , як у випадку тертя негнучких тіл, що відповідає загальновизнаним уявленням про тертя

[18-20].

:

- без врахування відцентрових сил:

$$N \geq \frac{F_0}{f}; (S_1 + S_2) \geq \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_T}{f \cdot \varphi}; \text{ де } F_0 - \text{ кругове тягове зусилля};$$

- з врахуванням відцентрових сил:

$$N \geq \frac{F_0 \cdot k_T}{f}; (S_1 + S_2) \geq \frac{2F_0 \cdot k_T}{f \cdot \varphi} + 2qv^2.$$

Отже при визначенні натягування гнучкого тіла уздовж лінії контакту з блоком, сили та коефіцієнта тертя між тілами, прогнозуванні тягової спроможності машин за рівнянням Ейлера при проектуванні та експлуатації машин виникає методична похибка визначення параметрів, яка пов'язана з неточністю вказаного рівняння.

До цього часу, на протязі століть неточність рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для реальних гнучких тіл доводилась за результатами випробувань (експертною оцінкою) – за значенням статистичного коефіцієнта тертя гнучкого тіла, який визначався непрямим методом при ковзанні тіл на плоскій площині з використанням закону тертя тіл Кулона - Амонтона.

В табл. 1.1. приведені відомості про альтернативні методи визначення параметрів тертя тіл.

Таблиця 1.1.

Відомості про альтернативні методи визначення параметрів тертя тіл

Методи визначення параметрів тертя тіл		
Найменування закону та параметр тертя тіл	Діючий закон та формули визначення	Новий правильний закон та формули визначення
1. Закон тертя тіл	Закон тертя тіл Амонтона (Леонардо да Вінчі): $F = f \cdot N$ де $f - const$	Закон тертя тіл Кулона : - для параметрів тертя тіл Кулона $F = F_c + tg\beta \cdot N$ - для коефіцієнта тертя $F = f \cdot N$ де $f - var$
2. Закон тертя - рівняння тертя гнучких тіл.	Рівняння тертя гнучких тіл Ейлера при ковзанні: $\frac{S_1}{S_2} = e^{f \cdot \varphi}$	Нове рівняння тертя гнучких тіл при ковзанні та зчепленні (у тому числі для коефіцієнта зчеплення $\mu$ чи його неповному значенні й неповній силі тертя $F$ ): - для параметрів тертя Кулона $S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$ - для коефіцієнта тертя: $S_1 - S_2 = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$

		<p>- з врахуванням відцентрових сил</p> $S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$ $S_1 - S_2 = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$
а) сила тертя;	за рівнянням Ейлера: $F = S_1 - S_2 = S_2 \cdot (e^{f \cdot \varphi} - 1).$	за новим рівнянням тертя гнучких тіл: <p>- для параметрів тертя Кулона:</p> $F = S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$ <p>- для коефіцієнта тертя:</p> $F = S_1 - S_2 = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$ <p>з врахуванням відцентрових сил:</p> $F = S_1 - S_2 = F_c + tg\beta \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$ $F = S_1 - S_2 = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$
б) нормальна реакція між тілами;	за рівнянням Ейлера не визначена: $N = \int_0^{\varphi} S_2 \cdot e^{f \cdot \varphi} \cdot da = var.$	за новим рівнянням тертя гнучких тіл визначена прямо: <p>- без врахування відцентрових сил</p> $N = \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right).$ <p>- з врахуванням відцентрових сил</p> $N = \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right).$
в) коефіцієнт тертя тіл;	за рівнянням Ейлера визначається не прямо: $f = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1}{S_2}.$	за новим рівнянням: <p>- без врахування відцентрових сил:</p> $f = \frac{F}{N} = \frac{2 \cdot (S_1 - S_2)}{\varphi \cdot (S_1 + S_2)}$ <p>- з врахуванням відцентрових сил</p> $f = \frac{F}{N} = \frac{2 \cdot (S_1 - S_2)}{\varphi \cdot (S_1 + S_2 - 2qv^2)}$
г) натягування гнучкого тіла;	за рівнянням Ейлера $S(a) = S_2 \cdot e^{f \cdot a}.$	за новим рівнянням тертя гнучких тіл $S(a) = S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot a$
д) реалізація тягового зусилля на блоці за умовою зчеплення.	у відповідності до рівняння Ейлера за одним із зусиль натягування гнучкого тіла на привідному	у відповідності до нового рівняння тертя гнучких тіл за двома зусиллями натягування гнучкого тіла чи нормальною реакцією на привідному блоці:

	блоці: $S_{2min} = \frac{F_0 \cdot k_T}{(e^{f \cdot \varphi} - 1)}$	- без врахування відцентрових сил $(S_1 + S_2) \geq \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_T}{f \cdot \varphi}; \quad N \geq \frac{F_0 \cdot k_T}{f};$ - з врахуванням відцентрових сил $(S_1 + S_2) \geq \frac{2F_0 \cdot k_T}{f \cdot \varphi} + 2qv^2; \quad N \geq \frac{F_0 \cdot k_T}{f}.$
--	--	---

Підтвердження правильності нового рівняння тертя гнучких тіл і, навпаки, неправильності рівняння Ейлера вперше здійснили теоретично прямим методом шляхом перевірки вказаних рівнянь на відповідність законам класичної механіки - фундаментальним умовам рівноваги механічної системи, закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі та закону Гука [26,27]. .

Дивись, зокрема, перевірку вказаних рівнянь за умовами рівноваги сил та моментів механічної системи.

На рис. 1.2. приведена еюра нормальної реакції по лінії контакту гнучкого тіла з блоком, наприклад, коли кут ( $\varphi$ ) обхвату блока гнучким тілом дорівнює  $180^0$  або  $3,14$  рад.

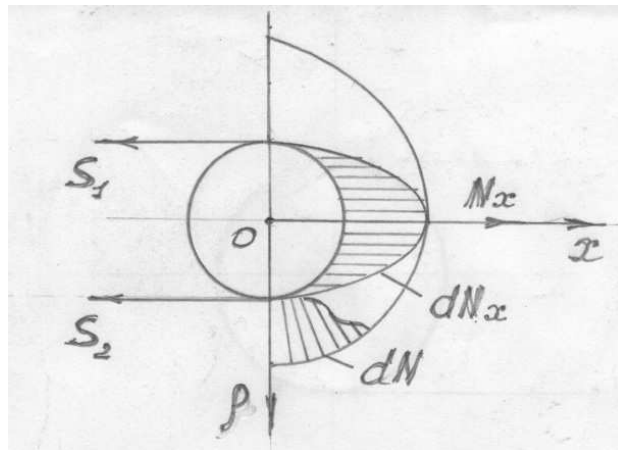


Рис. 1.2. Еюра нормальної реакції по лінії контакту гнучкого тіла з блоком:  $dN$  - нормальна реакція на елементарній ланці гнучкого тіла;  $dN_x$  - проекція нормальної реакції на елементарній ланці гнучкого тіла;  $N_x$  - складова нормальної реакції на блоці в напрямку дії сил натягування  $S_1, S_2$ ;  $S_1, S_2$  - більша й менша сили натягування на контактах з блоком;  $\square$  - вісь полярної системи координат;  $x$  - вісь абсцис декартової системи координат.

На рис. 1.3. приведена залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блока для нового й відомого рівняння тертя гнучких тіл Ейлера.

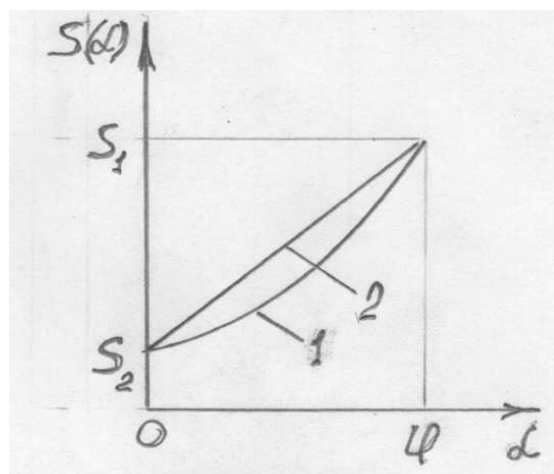


Рис. 1.3. Залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блока: 1 – для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. 2 – для нового рівняння тертя гнучких тіл 2007 р.

Розглянемо спочатку перевірку рівняння Ейлера умовам рівноваги сил та моментів механічної системи на блоці (відомо:  $S_1 + S_2 = R = N_x$ , де  $R, N_x$  – дійсна та розрахункова реакція на блоці; рівняння рівноваги Ейлера для елементарної ланки гнучкого тіла:  $dN = S a \cdot da$ ;  $M_0 = F_0 r = F_{н-с} r \rightarrow F_0 = F_{н-с} = S_1 - S_2$ , де  $M_0, F_0$  – зовнішній момент та кругове тегове зусилля,  $F_{н-с}$  – кругове тягове зусилля, яке реалізується на блоці.), рис. 1.2 та рис. 1.3.:

- умова рівноваги сил:

$$N_x = \int_0^\pi S(a) \sin(a) da = \int_0^\pi S_2 e^{f \cdot a} \sin(a) da =$$

$$= \left( \frac{S_2 e^{f \cdot a}}{f^2 + 1} (f \sin(a) - \cos(a)) \right) \Big|_0^\pi = \frac{S_2 (e^{f \cdot \pi} - 1)}{f^2 + 1} \neq S_1 + S_2$$

- умова рівноваги моментів:

$$F_{н-с} = S_2 \cdot (e^{f \cdot \varphi} - 1) = S_2 \cdot (e^{\frac{F}{N} \cdot \varphi} - 1) = S_2 \cdot (e^{\frac{S_1 - S_2}{N} \cdot \varphi} - 1) \neq S_1 - S_2;$$

Перевірка нового рівняння тертя на відповідність умовам рівноваги механічної системи:

- умова рівноваги сил:

$$N_x = R = \int_0^\pi S(a) \sin(a) da = \int_0^\pi \left( S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\pi} a \right) \sin(a) da =$$

$$= (S_2 (-\cos(a))) + \frac{S_1 - S_2}{\pi} (\sin(a) - a \cdot \cos(a)) \Big|_0^\pi = S_1 + S_2.$$

- умова рівноваги моментів:

$$F_{н-с} = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right) = f \cdot N = \frac{F}{N} \cdot N = \frac{S_1 - S_2}{N} \cdot N = S_1 - S_2;$$

Таким чином, нове рівняння тертя гнучких тіл, в протиположності до відомого «закону» тертя гнучких тіл Ейлера відповідає, зокрема, умовам рівноваги класичної механіки, що однозначно й вичерпно свідчить про його правильність.

Тому, використання нового рівняння тертя гнучких тіл при розрахунках його фрикційних характеристик, на відміну від рівняння тертя гнучких тіл Ейлера, не має методичної складової похибки визначення, а їх оцінка є незмінною і відповідає дійсності.

## 1.2. Новий метод визначення параметрів експлуатації стрічкового конвейєра.

Ефективність використання транспортно-технологічних схем неможлива без визначення і прогнозування параметрів експлуатації стрічкового конвеєра, у тому числі, тягової здатності стрічкового конвеєра, які обґрунтовуються його експлуатаційним розрахунком [7,8,18-20]. .

Однак методи експлуатаційних розрахунків стрічкового конвеєра, які

застосовуються, не надійні не тільки за рахунок використання недосконалого рівняння тертя гнучких тіл Ейлера. Тому, інколи прогнозовані режими експлуатації конвеєра не підтверджуються практикою і вже в робочих умовах емпіричним шляхом виправляються [7-9,23,24, 26,27]. .

Діючим розрахунком стрічкового конвеєра, зокрема, передбачено визначення натягування конвеєрної стрічки графо-аналітичним методом і включає побудову діаграми натягування, яка, окрім використання не досконалого закону тертя гнучких тіл Ейлера, не відповідає умовам рівноваги механічної системи [26,27]. .

Отже, підсиюється сумнів щодо правильності методу розрахунку стрічкового конвеєра, обґрунтування раціональних режимів його роботи, який, до того ж, не враховує вплив ваги і швидкості руху конвеєрної стрічки. Зазначене негативно позначається на ефективності та безпеці використання конвеєрних транспортно-технологічних схем.

В результаті проведених експериментальних досліджень на випробувальному горизонтальному стенді-конвеєрі встановлені закономірності переміщення замкнутого натягнутого гнучкого тіла з вантажем, що підтверджують їх відповідність фундаментальним умовам рівноваги класичної механіки [26,27]. :

- при випробуваннях реакція  $R$  і попереднє зусилля натягу  $P$  на осях приводного і натяжного блоків не змінюються і рівні між собою;
- передача конвеєрній стрічці різного тягового зусилля на приводному блоці  $F_0$  здійснюється при незмінній реакції  $R$  на його осі;
- натягування конвеєрної стрічки на обох контактах з приводним блоком при передачі різного тягового зусилля змінюються дзеркально;
- при різних режимах випробувань подовження замкнутої натягнутою конвеєрної стрічки не змінюється і свідчить про незмінність потенційної енергії конвеєрної стрічки (або її графічної оцінки - площі дійсної діаграми натягу) і дотримання закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі.

Проведений аналіз діючого методу побудови діаграми натягування конвеєрної стрічки стрічкового конвеєра показав, що він не відповідає отриманим експериментальним даним і фундаментальним умовам рівноваги механічної системи, що вказує про актуальність розробки нового методу побудови діаграми натягування стрічки [26,27]. .

Нами розроблений новий графо-аналітичний метод розрахунку стрічкового конвеєра з побудовою діаграми натягування конвеєрної стрічки. Він забезпечує достовірне визначення прогнозованих параметрів роботи конвеєра - максимальне натягування конвеєрної стрічки  $F_{max}$  (по ньому вибирають тип стрічки) і зусилля попереднього натягування стрічки  $P$ , які впливають на тягову здатність, надійність роботи стрічкового конвеєра, ресурс конвеєрної стрічки та ін [26,27].

В таблиці 1.2. приведені характеристики альтернативних методів визначення параметрів експлуатації стрічкового конвейєра.

Табл. 1.2.

Характеристики альтернативних методів визначення параметрів експлуатації стрічкового конвейєра.

Методи визначення параметрів стрічкового конвейєра

Характеристика методу	Діючий метод	Новий метод
Назва методу	Графоаналітичний метод визначення параметрів стрічкового конвеєра .	Графоаналітичний метод визначення параметрів стрічкового конвеєра.
а) сутність методу;	використовуються закономірності переміщення розімкнутого послідовного ланцюга елементів і натягування тягового органа, що не відповідає умовам роботи стрічкового конвеєра;	використовуються закономірності переміщення замкнутого натягнутого гнучкого тіла з вантажем і його натягування, що відповідає умовам роботи стрічкового конвеєра;
б) реакції на станціях конвеєра: в напрямку транспортування: $N_x^{0_1} = \int_0^{\varphi} S \cdot \sin \alpha da = S_1 + S_2 = R ;$ $N_x^{0_2} = \int_0^{\pi} S \cdot \sin \alpha da = S_1 + S_2 = P .$ $* P + \lg(q + 2q_0) \sin \alpha + R = 0$	$N_x^{0_1} = \int_0^{\varphi} S_2 e^{f\varphi} da = \frac{S_2 (e^{f\varphi} - 1)}{f^2 + 1} \neq S_1 + S_2 \neq R ;$ теоретично не встановлена $* P + \lg(q + 2q_0) \sin \alpha + R \neq 0$	$N_x^{0_1} = \int_0^{\varphi} (S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi}) \sin \alpha da = S_1 + S_2 = R ;$ $N_x^{0_2} = \int_0^{\pi} (F_2 + \frac{F_3 - F_2}{\pi}) \sin \alpha da = F_3 + F_2 = P .$ $* P + \lg(q + 2q_0) \sin \alpha + R = 0$
в) відцентрові сили стрічки - $2q\varphi v^2$ ;	не враховуються;	враховуються;
г) кругове тягове зусилля: $M_0 = F_0 r \rightarrow F_0 = M_0 / r ;$ $F_0 = F_{н-с} = S_1 - S_2$ $F_{н-с} = F_{1-4}.$	$F_0 \neq F_{н-с};$ $F_{1-4} \sim F_{1-2} + F_{2-3} + F_{3-4}.$	$F_0 = F_{н-с};$ $F_{1-4} \sim F_{1-2} + F_{2-3} + F_{3-4}.$
д) тягове зусилля та сила тертя на блоках станцій: $F_{н-с} = S_1 - S_2 ;$ $F_{3-2} = F_3 - F_2.$	$F_{н-с} = S_2 \cdot (e^{f\varphi} - 1) \neq S_1 - S_2 ;$ теоретично не встановлена, $F_{3-2} \neq (F_3 - F_2),$ з практики: $F_{3-2} = 0,2 * F_2.$	- без врахування відцентрових сил: $F_{н-с} = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right) = S_1 - S_2 ;$ $F_{3-2} = \mu \cdot \left( \pi \cdot \frac{F_2 + F_3}{2} \right) = F_3 - F_2 ;$ - з врахуванням відцентрових сил: $F_{н-с} = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2qv^2}{2} \right) = S_1 - S_2 ;$ $F_{3-2} = \mu \cdot \left( \pi \cdot \frac{F_2 + F_3 - 2qv^2}{2} \right) = F_3 - F_2 ;$
е) умова, яка відповідає збереженню механічної		



<p>енергії в замкнутій механічній системі:</p> $\frac{\partial N}{\partial f} = \frac{\partial \int_0^{\varphi} S(a) da}{\partial f} = 0;$ $N = \int_0^{\varphi} S(a) \cdot da.$	$\frac{\partial N}{\partial f} = \frac{\partial \int_0^{\varphi} S_2 \cdot e^{f \cdot a} da}{\partial f} \neq 0,$ <p>оскільки:</p> $N = \int_0^{\varphi} S_2 \cdot e^{f \cdot a} \cdot da = \text{var.}$	$\frac{\partial N}{\partial f} = \frac{\partial \int_0^{\varphi} (S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot a) da}{\partial f} = 0,$ <p>Оскільки:</p> $N = \int_0^{\varphi} (S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot a) \cdot da = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2}.$
<p>д) система рівнянь рівноваги механічної системи:</p> <p>* <math>F_0 = F_{н-с}</math></p> <p>* <math>F_{н-с} = S_1 - S_2;</math></p> <p>* <math>P + lg(q + 2q_0) \sin \alpha + R = 0</math></p> <p>* <math>F_{н-с} = F_{1-4}.</math></p> <p>* <math>F_{3-2} = F_3 - F_2;</math></p> <p>*</p> $N_x^{0_1} = \int_0^{\varphi} S \cdot \sin \alpha da =$ $= S_1 + S_2 = R;$ <p>*</p> $N_x^{0_2} = \int_0^{\pi} S \cdot \sin \alpha da =$ $= F_2 + F_3 = P.$ <p>*</p> $\frac{\partial N}{\partial f} = \frac{\partial \int_0^{\varphi} S(a) da}{\partial f} = 0;$ $N = \int_0^{\varphi} S(a) \cdot da.$	<p>* не виконується;</p> <p>* не виконується;</p> <p>* не виконується;</p> <p>* виконується приблизно;</p> <p>* теоретично не встановлено;</p> <p>* не виконується;</p> <p>* теоретично не встановлено</p> <p>* не виконується;</p>	<p>* виконується;</p> <p>* виконується;</p> <p>* виконується;</p> <p>* виконується приблизно;</p> <p>* виконується ;</p> <p>* виконується;</p> <p>* виконується;</p> <p>* виконується;</p>

Метод реалізується в такий спосіб.

На рис. 1.4. представлена розрахункова схема горизонтального стрічкового конвеєра:

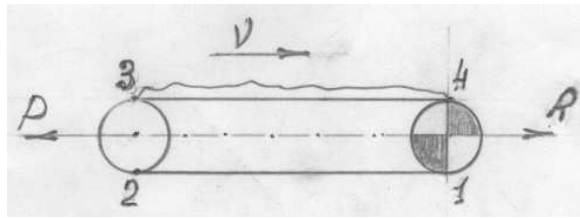


Рис. 1.4.. Розрахункова схема горизонтального стрічкового конвеєра:  $P$  - зусилля натягу конвеєрної ленто на блоці натяжної станції;  $R$  - реакція на блоці приводної станції;  $v$  - швидкість руху конвеєрної стрічки; 1,2,3,4 - контакти конвеєрної стрічки з блоками натяжна і приводний станції.

На рис. 1.5. представлена діаграма натягування конвеєрної стрічки горизонтального стрічкового конвеєра.

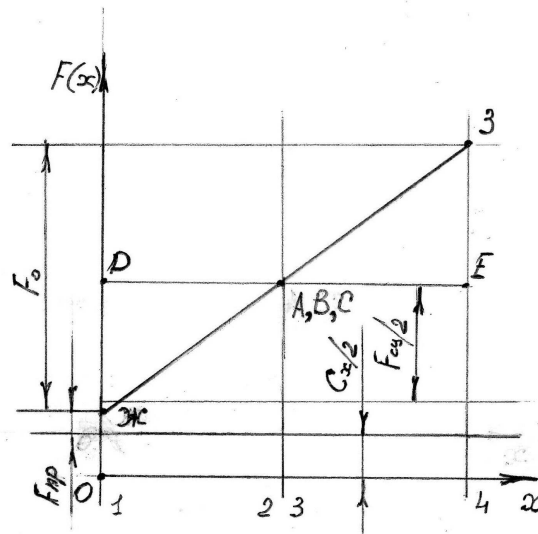


Рис. 1.5. Діаграма натягування конвеєрної стрічки горизонтального стрічкового конвеєра:  $F(x)$  - залежність сили натягування стрічки від її перетину; лінії 1,2,3,4 - контакти стрічки з блоками натяжна й приводної станції;  $F_0$  - кругове тягове зусилля конвеєра;  $F_{зч}$  - необхідна сила натягування стрічки за умовою зчеплення з привідним блоком;  $F_{пр}$  - нормативна сила натягування стрічки за умовою провисання;  $C_x$  - складова відцентрових сил в напрямку транспортування вантажів.

На діаграмі рис. 3. точки  $A$ ,  $B$  і  $C$  зливаються, так як сила тяги ділянки  $F_{2-3}$  визначається з виразу  $F_3 = 1,02 * F_2$ , а тому вона  $\sim 0$ .

Новий порядок побудови діаграми натягування конвеєрної стрічки горизонтального стрічкового конвеєра з урахуванням її відцентрових сил.

1. З відомих методик обчислюють сили тяги окремих ланок конвеєрної ленто  $F_{1-2}$ ,  $F_{2-3}$ ,  $F_{3-4}$  і загальне кругове тягове зусилля для переміщення замкнутої конвеєрної стрічки, як:  $F_0 = F_{1-4} = \sim F_{1-2} + F_{2-3} + F_{3-4}$ .

2. В подальшому:

- керуються нормативним натягуванням стрічки за умовою провисання  $F_{пр}$ ;
- обчислюють необхідне натягування стрічки на обох контактах з блоком приводної станції без та з врахуванням складової її відцентрових сил  $C_x$  за умовою її зчеплення з привідним блоком:

$$F'_{зч} = (F_1 + F_4) \geq \frac{2 \cdot F_0}{\varphi \cdot f}; \quad F_{зч} = (F_1 + F_4) \geq \frac{2 \cdot F_0}{\varphi \cdot f} + 2qv^2;$$

при цьому визначають мінімальне натягування на привідному блоці -

$$F_{1\min,cy} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min,y}}{2} - \frac{F_0}{2}.$$

3. Виконують побудову діаграми натягування конвеєрної стрічки:

- на вертикальних лініях 2,3 довільно відкладають силу тяги ланки блоку натяжної станції  $F_{2-3}$  (точки  $A$  і  $B$ ), якщо ця сила тяги відома, а по-середині точку  $C$  - якщо вона не відома;

- зносять положення точки  $C$  на вертикальні лінії 1 і 4 (точки  $D$  і  $E$ ), що є середнім арифметичним натягуванням на контактах з привідним блоком;

- на вертикальних лініях 1, 4 від точок  $D$  і  $E$  вниз и вгору відкладають  $1/2$  загального кругового тягового зусилля  $F_0/2$  (точки  $Ж$  і  $З$ ), які відповідають силі натягування стрічки на контактах з привідним блоком;

- відрізками прямої лінії з'єднують точки  $Ж, A, B$  і  $З$ , що є діаграмою натягу стрічки, яка не характеризує її кількісно - немає вісі абсцис;

- проводять вісь абсцис діаграми, зокрема, і для забезпечення умов роботи стрічкового конвеєра в період його запуску:

-- відкладають силу  $F_{1\min,34}$  без врахування складової відцентрових сил від нижньої точки  $Ж$  або  $З$  на лініях 1,4 за умовою зчеплення і проводять «вісь зчеплення»;

-- відкладають силу  $F_{np}$  від найнижчої точки  $Ж, A, B$  або  $З$  на лініях 1, 2, 3 або 4 за умовою провисання і проводять «вісь провисання»;

-- відкладають половину складової відцентрових сил  $C_x/2$  конвеєрної стрічки, яка дорівнює  $qv^2$  від нижньої з проведених вісей, і проводять «вісь відцентрових сил», що враховує вплив відцентрових сил (при цьому повинна виконуватись умова за  $F_{34}$  з врахуванням складової відцентрових сил  $C_x$ ).

Побудову діаграми натягування конвеєрної стрічки завершено. Ордината діаграми характеризує натягування конвеєрної стрічки в будь-якому перетині замкнутого контуру стрічки в вибраному масштабі.

Новий метод, зокрема, відповідає встановленим закономірностям переміщення замкнутого натягнутого на блоки гнучкого тіла з розподіленим вантажем, останній редакції закону збереження механічної енергії в замкнутій механічній системі та умовам рівноваги класичної механіки [26,27], а саме:

$$P + lg(q + 2q_0)Sina + R = 0;$$

$$(F_4 - F_1) = F_{н-с};$$

$$(F_3 - F_2) = F_{2-3};$$

$$(F_3 + F_2) = P;$$

$$(F_4 + F_1) = R.$$

де  $l$  – довжина стрічкового конвеєра;  $q$  – лінійна маса вантажу;  $q_0$  – лінійна маса гнучкого тіла;  $v$  - швидкість руху гнучкого тіла;  $a$  – кут нахилу стрічкового конвеєра;  $F_{н-с}$  - тягове зусилля стрічкового конвеєра.

### 1.3. Новий метод визначення параметрів експлуатації самохідної машини й поїзда в період гальмування .

На рис. 1.6.. представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою. При розрахунках параметрів руху поїзда в період гальмування за діючою методикою допускалось, що швидкість руху поїзду при підготовці гальма до дії не змінюється [7-9].

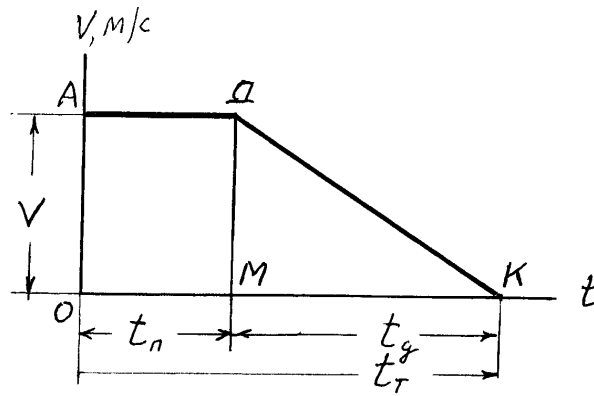


Рис. 1.6.. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

Згідно з діючим методом розрахунку параметрів руху поїзда довжина гальмового шляху та допустима швидкість його руху, які забезпечують заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{дон} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_g$  - дійсний час гальмування;  $a$  - прискорення поїзда під час дійсного гальмування;  $l_n$  - нормативний шлях гальмування.

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзда в цей період часу. Швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії може бути не тільки постійною, але, як з уповільненням, так і з прискоренням, що визначається характеристиками траси та ходовими параметрами поїзда, наприклад, рис. 1.7 [25].

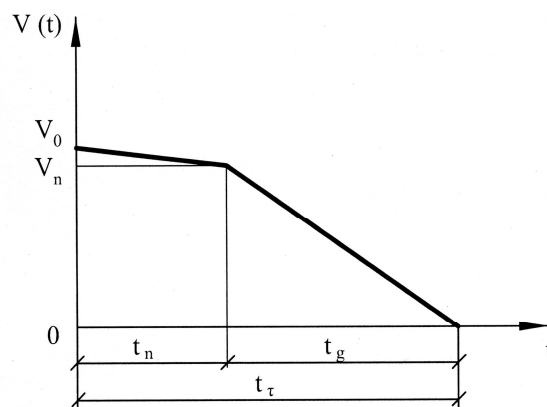


Рис. 1.7. Графік умовного зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_g$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $V_n$  - швидкість поїзда в момент прикладення гальмівної сили  $B$ .

Слід мати на увазі, що при визначенні часу підготовки гальм до дії умовно замінюють повільний реальний процес наростання тиску повітря в гальмівному циліндрі миттєвим стрибком до максимальної розрахункової величини. Отже, передбачається, що протягом часу підготовки гальм до дії гальмо не працює і поїзд рухається без сили тяги ( $F$ ) і гальмівної сили ( $B$ ). Після закінчення цього часу гальма як би миттєво спрацьовують і поїзд проходить решту гальмівного шляху при повній силі натискання гальмівних колодок.

Така еквівалентна заміна реального процесу наростання тиску повітря в гальмівному циліндрі умовним можлива за однаковий гальмівний шлях, який проходить поїзд при реальному і умовному (віртуальному) наповненні гальмівних циліндрів.

Очевидно, що час підготовки гальм до дії зростає зі збільшенням довжини поїзда, вагони якого можуть бути обладнані гальмом.

За даним НГУ для шахтних електровозів, в яких гальмом обладнані тільки колісні пари локомотива, кар'єрного залізничного та автомобільного транспортів з пневматичним приводом гальма час підготовки ( $t_n$ ) приймається відповідно 3,4 сек; 7 сек та 1,5-2,5 сек.

Ці обставини призводять до неправильного визначення параметрів руху поїзда та похибки за діючою методикою розрахунків.

В дійсності гальмовий шлях ( $l_m$ ) та допустима швидкість руху поїзда ( $V_{дон}$ ) у відповідності до нахилу траси та характеристик поїзду (рис. 1.7.), яка забезпечує заданий нормований гальмовий шлях, складають [25[23,24, 26,27].

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a}, (l_m > l_n).$$

$$V_{дон} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)},$$

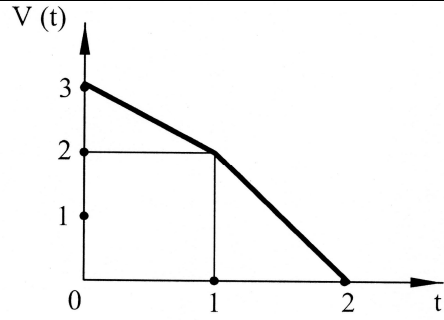
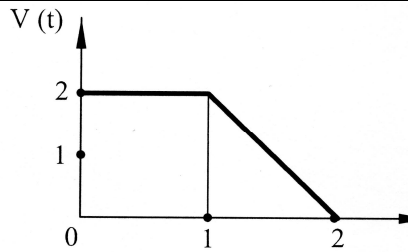
де  $a_0$  – прискорення поїзда під час підготовки гальма до дії.

В таблиці 3. приведені альтернативні методи визначення параметрів експлуатації самохідної транспортної машини й поїзда.

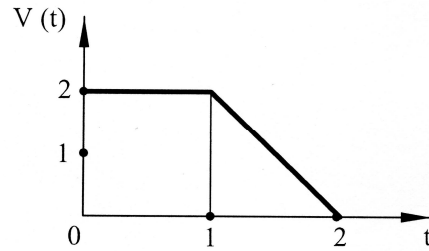
Табл. 3.

Альтернативні методи визначення параметрів експлуатації самохідної транспортної машини й поїзда

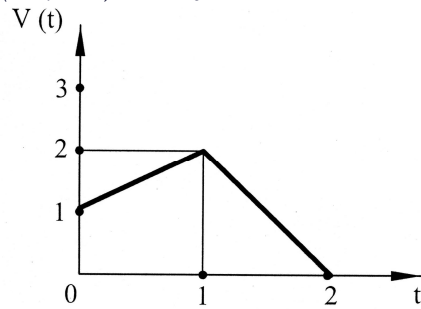
Методи визначення параметрів експлуатації самохідної машини й поїзда в період гальмування		
Характеристика руху машини та її параметри в період гальмування	Діючий графік моделі руху машини та формули розрахунку параметрів гальмування	Нові правильні графіки моделі руху машини та формули розрахунку параметрів гальмування
1. Графік залежності швидкості руху машини від часу	<i>графік руху машини по трасі з різним ухилом;</i>	<i>а) графік руху машини коли ухил траси відповідає: <math>(i, \%_o + w) &gt; 0</math></i>



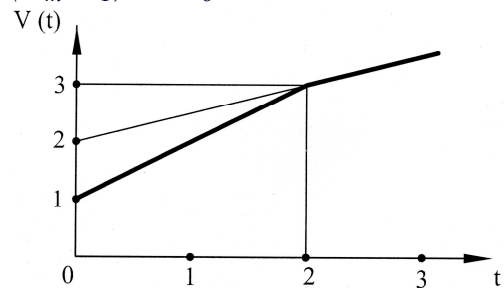
б) графік руху машини коли ухил траси відповідає:  $(i, \%_o + w) = 0$ ;



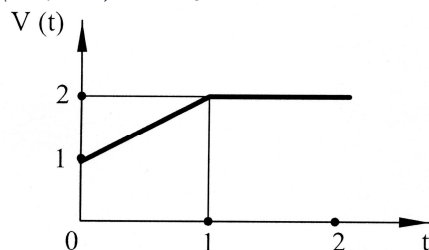
в) графік руху машини коли ухил траси і гальмова сила відповідає:  $(i, \%_o + w) < 0$  та  $(B_m/G_T) + i, \%_o + w > 0$ ;



г) графік руху машини коли ухил траси і гальмова сила відповідає:  $(i, \%_o + w) < 0$  та  $(B_m/G_T) + i, \%_o + w < 0$ ;



д) графік руху машини коли ухил траси і гальмова сила відповідає:  $(i, \%_o + w) < 0$  та  $(B_m/G_T) + i, \%_o + w = 0$ ;



2..Довжина гальмового шляху машин	$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} ,$	$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} ,$
3. Допустима швидкість руху машини	$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n ;$	$V_{\text{дон}} = \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} + (a - a_0) \cdot t_n ,$

Моделювання гальмівного режиму руху поїзда відповідно до отриманих виразів дали результати, які тотожні істинним. Зокрема, істинний гальмівний шлях поїзда - площа, обмежена залежністю швидкості руху поїзда від часу  $V(t)$  до його зупинки. Використання отриманих розрахункових формул руху поїзда та самохідних транспортних машин в режимі гальмування виключає методичну похибку прогнозування параметрів, що підвищує ефективність та безпеку його руху.

## 2. ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ

**Мета:** мати уявлення про вимірювання і навчитись знаходити відхилення результату вимірювання фізичної величини від її істинного значення, розрізняти і за способом вираження абсолютні та відносні похибки вимірювань, з деталізацією її складових.

**Вимірювання** – це знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

### 2.1. Загальні відомості про вимірювання [1,3,5].

#### Види вимірювань:

- **Прямі**, за якого розшукуване значення вимірюваної фізичної величини знаходять без перетворення її роду та використання відомих залежностей безпосередньо з дослідних даних (порівнянням її розміру з розміром, що відтворюється мірою);

- **Непрямі**, за якого розшукуване значення фізичної величини знаходять після перетворення її роду або обчислення за відомого залежністю між цією величиною та величинами (аргументами), що визначаються прямим вимірюванням.

*Непрямі вимірювання бувають: опосередковані; сукупні та сумісні.*

*Опосередковані вимірювання* - за яких значення вимірюваної величини опосередковано знаходять обчисленням за відомою залежністю між нею та величинами – аргументами, що вимірюють прямо.

Функціональну залежність  $f$  результату  $Y$  від аргументів  $x_1, x_2 \dots x_n$  називають формулою (рівнянням) зв 'язку:

$$Y=f(x_1, x_2 \dots x_n ).$$

*Сукупні вимірювання* - за яких значення вимірюваної величини знаходять розв'язанням системи рівнянь різних сполучень водночас прямо виміряних кількох однойменних величин.

*Сумісні вимірювання* - за яких значення вимірюваної величини знаходять шляхом одночасного вимірювання двох або кількох не однойменних величин та пошуку залежності між ними.

#### Методи вимірювань:

- **Безпосередньої оцінки** - полягають у знаходженні значення фізичної величини за допомогою відповідного вимірювального засобу;

- **Порівняння з мірою** за якими вимірювану величину порівнюють з однорідною фізичною величиною, розмір якої відтворюється мірою.

*Методи порівняння з мірою* бувають: *метод повного зрівноважування: метод заміщення та диференціальний метод*, або *метод неповного зрівноважування*.

*Метод повного зрівноважування* з регульованою мірою - вихідна величина міри регулюється, доки не буде досягнута певна рівновага з розшукуваною величиною, що визначається, наприклад, гальванометром.

*Метод заміщення* - розшукувана фізична величина та вихідна величина регульованої міри діють на відповідний вимірювальний засіб по чергово, доки не буде досягнуте повне зрівноваження.

*Диференціальний метод (метод неповного зрівноважування)*- вимірюється різниця між розшукуваною фізичною величиною та вихідною величиною нерегульованої міри.

#### Способи вимірювань:



- **Аналоговий спосіб** – за яким візуальний сигнал є неперервною функцією вимірюваної величини (наприклад, візуальним сигналом є довжина стовпчика ртуті в термометрі, яка пропорційна температурі);

**Цифровий спосіб** – за яким візуальний сигнал є дискретною функцією вимірюваної величини й має вигляд цифр або символів.

**Залежно від мінливості фізичної величини:**

- **Статичні**, за яких вихідний сигнал засобу вимірювань залишається незмінним протягом всього часу вимірювання;

- **Динамічні** – вихідний сигнал істотно змінюється за час вимірювання.

**Класи вимірювань:**

– **Еталонні** – вимірювання якнайвищої точності (використовується для відтворення основних одиниць фізичних величин, вимірювання фізичних констант);

– **Контрольно-перевірні** - похибка яких не має перевищувати певного значення (використовуються для контрольної перевірки інших засобів вимірювань);

– **Технічні** - які підрозділяються на *лабораторні*, що здійснюються під час проведення різних досліджень, та *виробничі*, що виконуються для добування необхідної повідомчої інформації в системах керування технологічними процесами.

**Принцип вимірювання** визначається фізичним явищем або сукупністю фізичних явищ, за допомогою яких здійснюється вимірювання.

**Засоби вимірювальної техніки** – це технічні засоби, які застосовуються під час вимірювань і мають нормовані метрологічні характеристики.

До них належать засоби вимірювань та вимірювальні пристрої.

## 2.2. Відомості про похибку вимірювання.

**Похибка вимірювання** — це відхилення результату вимірювання фізичної величини від її істинного значення.

### 2.2.1. Види похибок вимірювань за способом вираження:

- **Абсолютна** похибки вимірювань - різниця між *результатом вимірювання*  $x$  та *істинним значенням* вимірюваної фізичної величини  $X$ :

$$\Delta_x = x - X,$$

виражена в одиницях вимірюваної фізичної величини.

- **Відносна** похибки вимірювань - дорівнює відношенню *абсолютної похибки*  $\Delta_x$  до *істинного (дійсного - знайденого експериментально з якнайвищою точністю й настільки наближається до істинного, що для поставленої вимірювальної задачі може бути використане замість нього) значення* вимірюваної фізичної величини й виражається в частках одиниці:

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{X} \approx \frac{\Delta_x}{x_D},$$

або в процентах:

$$\delta_{x\%} = 100 \frac{\Delta_x}{X} \approx 100 \frac{\Delta_x}{x_D}.$$

### 2.2.2. Складові похибок вимірювань розрізняються:

- за *закономірностями прояву*;

- за *причинами появи* або *місцем виникнення*;

- за *ступенем залежності від значення вимірюваної фізичної величини*;

- за *характером змін* тощо.

**За закономірностями прояву** за багаторазових вимірювань бувають дві складові похибки:

- **Систематична** похибка  $\Delta$  - яка залишається постійною або закономірно змінюється

за повторних вимірювань однієї й тієї самої фізичної величини;

- **Випадкова** похибка  $\Delta^{\circ}$  - яка змінюється випадково за повторних вимірювань незмінної фізичної величини.

Характеристику якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання, називають **правильністю** вимірювання.

Характеристику якості вимірювань, що відображує близькість один до одного результатів повторних вимірювань, виконаних в однакових умовах, називають **збіжністю** вимірювань.

Головною характеристикою якості вимірювання вважають **точність** вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини.

**За причинами появи або місцем виникнення** похибок вимірювання виділяють:

- **Методичну складову** - це наслідок недосконалості методу вимірювання або деяких припущень чи наближень у розрахункових формулах;

- **Іструментальну складову** – яка зумовлена властивостями засобів вимірювальної техніки (якістю виготовлення та стабільністю мір, вимірювальних приладів і перетворювачів, способом градуювання та похибкою відліку вимірювальних приладів та взаємодією цих засобів з об'єктом вимірювання);

- **Сб'єктивну складову** – яка може виникати через недосконалість органів чуття спостерігача, а також через його недосвідченість і неухважність у момент відліку показу.

**За ступенем залежності (нааявності або відсутності функціонального зв'язку) від значення вимірюваної фізичної величини** розрізняють:

- **Адитивну складову** (від лат. additives – додаткова, тобто похибка, пов'язана з додаванням) – яка не залежить від значення вимірюваної фізичної величини.

- **Мультиплікативну складову** (від лат. multiplication – множення, тобто похибка, пов'язана з множенням) – яка залежить від значення вимірюваної фізичної величини.

**За характером змін.**

Результати вимірювання, що мають надмірну похибку називають **промахами**.

**Промех** – похибка, яка обумовлена неухвагою експериментатора чи нестабільними умовами експерименту (можуть бути наслідком неправильного відліку за шкалою приладу, помилки під час визначення ціни поділки шкали або запису результату вимірювання, різкого поштовху в момент відліку показів, стрибка напруги живлення вимірювальної системи тощо).

### 2.2.3. Основна і додаткова похибки.

Похибку, яка виникає за нормальних умов експлуатації вимірювальної техніки, називають **основною**, наприклад, при температурі  $20 \pm 5^{\circ} \text{C}$ .

Експлуатація вимірювальної техніки в інших умовах, наприклад за температури від  $-40$  до  $+50^{\circ} \text{C}$ , напруги живлення в межах  $\pm 20\%$  від номінальної, в разі відхилення приладу від його робочого положення й ін. призведе до появи похибок більших ніж **основна**. Ці похибки називають **додатковими**.

### 2.2.4. Нормування класів точності засобів вимірювань.

Основною характеристикою, що визначає гарантовані межі значень основних і додаткових похибок, є **клас точності** засобу вимірювальної техніки.

**За сучасним адитивним характером похибок** межі абсолютної похибки незмінні для будь-яких значень вимірюваної фізичної величини.

Класи точності приладів нормують вказуванням значення абсолютної похибки.

Для аналогових приладів за різних діапазонів вимірювання нормувати значення абсолютної похибки  $\Delta_x$  незручно. В цьому разі використовують різновид відносної похибки – *зведену похибку*  $\delta_{зв}$ .

Для аналогових вимірювальних приладів зведена похибка  $\delta_{зв}$ , %, виражається відношенням найбільшої абсолютної похибки  $\Delta_{x\max}$  для всього діапазону показів до нормованого значення  $N$  цього приладу (області значень між найменшим і найбільшим значення):

$$\delta_{зв} = (\Delta_{x\max}/N)100$$

У засобів вимірювань, в яких переважає адитивна складова похибки, але шкала істотно нерівномірна (наприклад, логарифмічна або гіперболічна), нормують зведене значення похибки щодо довжини шкали в міліметрах, а клас точності позначають, наприклад, так: 2,5.

Найбільшу абсолютну похибку результату вимірювання, наприкладом опору омметром, можна обчислити за класом точності зі співвідношення:

$$\Delta_R = \pm \frac{kL}{100S_x}$$

де  $L$  – довжина шкали, мм;  $S_x = l_x/R_x$  – чутливість у точці відліку, мм/Ом, де  $l_x$  — відстань між поділками в точці відліку, мм;  $R_x$  – різниця відліків за цими поділками, Ом.

У засобах вимірювальної техніки із суто мультиплікативною похибкою для визначення класу точності використовують відносну похибку, тобто похибку чутливості

$$\delta_x = \Delta_x/x$$

Відповідно клас точності  $k$  позначають числом, уміщеним у кружечок, наприклад: (1,5).

У такий спосіб нормують похибки інтегровальних приладів (наприклад, лічильників електричної енергії), масштабних перетворювачів (подільників навантаження, шунтів, вимірювальних трансформаторів напруги та струму). Абсолютну похибку вимірювання обчислюють за формулою

$$\Delta_x = (k/100)x$$

У цифрових вимірювальних приладів клас точності позначають двома числами, які записують через похилу риску, наприклад: 0,02/0,01. Тут перше число відповідає зведеній похибці наприкінці діапазону вимірювання ( $k_k$ ), а друге – на початку ( $k_n$ ).

Межа допустимої відносної похибки складає, % :

$$\delta_x = [k_k + k_n(x_k/x - 1)];$$

де  $x_k$  - кінцеве значення діапазону вимірювання;  $x$  – вимірювана величина.

Оскільки відносна похибка складає:

$$\delta_{x\%} = (\Delta_x/x)100;$$

то абсолютна похибка вимірювання:

$$\Delta_x = \delta_{x\%}x/100.$$

**Нормування деяких засобів вимірювання.**

Для засобів вимірювальної техніки, що застосовуються в акустиці, електроніці, відліковий пристрій яких градуйовано в децибелах, клас точності позначають у цих самих одиницях, наприклад: Кл. 0,5 дБ.

В деяких випадках клас точності нормують за значенням абсолютної похибки,

причому клас точності позначають порядковими цифрами, які не пов'язані з розміром похибок (наприклад, абсолютна похибка штрихової міри класу точності 1 не більше ніж 0,05 мм, незалежно від довжини цієї міри).

### 2.3. Приклади задач.

#### Приклад 2.1.

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла на привідному блоці конвейера за новим та відомим рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера за умовами рівноваги сил та моментів механічної системи, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою блоку  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .

Розв'язання:

Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра рис.2.1.

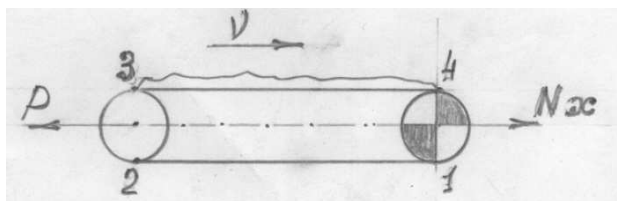


Рис. 2.1. Розрахункова схема стрічкового конвеєра: 1,2,3 та 4 – характерні точки конвеєра;  $P$  – сила попереднього натягування стрічки на натяжній станції;  $N_x$  – розрахункова складова реакції на привідній станції в напрямку транспортування;  $v$  – швидкість транспортування.

Побудуємо епюру нормальної реакції по лінії контакту гнучкого тіла з блоком та залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блока для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. та нового рівняння тертя 2007 р.

На рис. 2.2. приведена епюра нормальної реакції по лінії контакту гнучкого тіла з блоком, наприклад, коли кут ( $\varphi$ ) обхвату блока гнучким тілом дорівнює  $180^\circ$  або  $3,14$  рад.

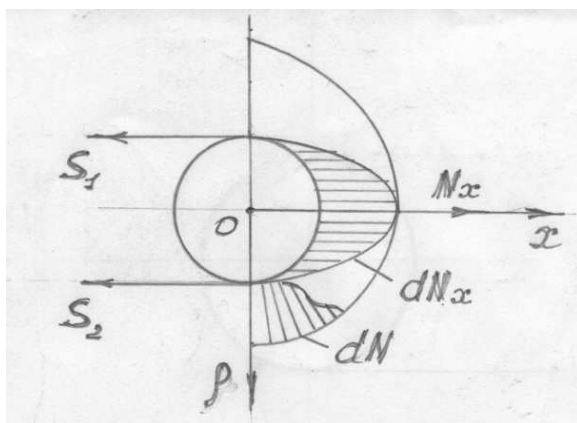


Рис. 2.2. Епюра нормальної реакції по лінії контакту гнучкого тіла з блоком:  $dN$  – нормальна реакція на елементарній ланці гнучкого тіла;  $dN_x$  – проекція нормальної реакції на елементарній ланці гнучкого тіла;  $S_1$ ,  $S_2$  – більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла;  $\square$  – ордината полярної системи координат;  $x$  – вісь абсцис декартової системи координат.

На рис. 2.3. приведена залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блока

для нового й відомого рівняння тертя гнучких тіл Ейлера.

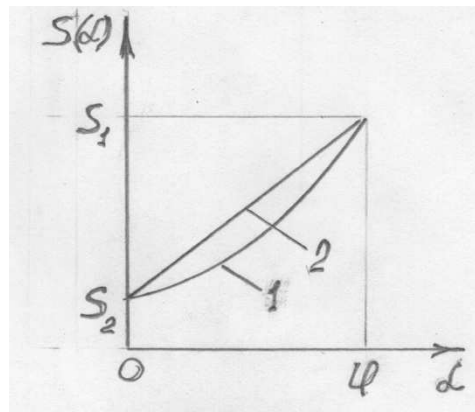


Рис. 2.3. Залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блока: 1 – для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. 2 – для нового рівняння тертя гнучких тіл 2007 р.

Перевірка рівнянь умовам рівноваги сил та моментів механічної системи на блоці здійснена за допомогою інтегрування рівняння рівноваги Ейлера для елементарної ланки гнучкого тіла:  $dN=S \cdot da$ .

а) реакція на блоці в напрямку руху гнучкового тіла:  $S_1+S_2=N_x$ :

- для нового рівняння тертя гнучких тіл:

$$N_x = \int_0^{\pi} S(a) \sin(a) da = \int_0^{\pi} \left( S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\pi} a \right) \sin(a) da =$$

$$= (S_2 (-\cos(a))) + \frac{S_1 - S_2}{\pi} (\sin(a) - a \cdot \cos(a)) \Big|_0^{\pi} = S_1 + S_2.$$

- для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера:

$$N_x = \int_0^{\pi} S(a) \sin(a) da = \int_0^{\pi} S_2 e^{f \cdot a} \sin(a) da =$$

$$= \left( \frac{S_2 e^{f \cdot a}}{f^2 + 1} (f \sin(a) - \cos(a)) \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{S_2 (e^{f \cdot \pi} - 1)}{f^2 + 1} \neq S_1 + S_2$$

в) тягове зусилля та сила тертя на блоках:  $F=S_1-S_2$  (при ковзанні та зчепленні):

- для нового рівняння тертя гнучких тіл (у тому числі нормальна реакція; відомо  $dN=Sda$ ):

$$F = S_1 - S_2 = f \cdot \left( \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} \right) = f \cdot N = \frac{F}{N} \cdot N = \frac{S_1 - S_2}{N} \cdot N = S_1 - S_2;$$

у тому числі:

$$N = \int_0^{\varphi} S(a) da = \int_0^{\varphi} \left( S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} a \right) da =$$

$$= \left( S_2 \cdot a + \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \frac{a^2}{2} \right) \Big|_0^{\varphi} = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot \varphi.$$

- для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера:

$$F = S_2 (e^{f \cdot \varphi} - 1) = S_2 \left( e^{\frac{S_1 - S_2}{N} \cdot \varphi} - 1 \right) \neq S_1 - S_2$$

Таким чином, відоме рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. за умовами рівноваги сил та моментів на привідному блоці конвейера - за реакцією на шарнірі

привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу й нормальною реакцією на контактні гнучкого тіла з привідним блоком і тяговим зусиллям на привідному блоці є неправильним, а нове рівнянням тертя гнучких тіл 2007 р. - правильним

### Приклад 2.2.

Знайти методичну похибку непрямого вимірювання реакції на шарнірі привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу й на контактні гнучкого тіла з блоком та тягового зусилля на привідному блоці, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою блоку  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .

Розв'язання:

Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра, рис.2.1., епюру напружень на привідному блоці конвеєра, рис. 2.2. та залежність натягування гнучкого тіла від кута обхвату блоку для рівняння тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. та нового рівняння тертя 2007 р., рис. 2.3.

1) Знайдемо нормальну реакцію на шарнірі привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу у відповідності до рівняння Ейлера (рівняння рівноваги сил Ейлера для елементарної ланки гнучкого тіла при ковзанні:  $dN = S da$ ) за формулою:

$$N_x = \int_0^\pi S(a) \cdot \sin(a) \cdot da = \int_0^\pi S_2 \cdot e^{f \cdot a} \cdot \sin(a) \cdot da =$$

$$= \left( \frac{S_2 \cdot e^{f \cdot \varphi}}{f^2 + 1} (f \cdot \sin a - \cos a) \right) / \pi = \frac{S_2 \cdot (e^{f \cdot \pi} - 1)}{f^2 + 1}.$$

Але для її визначення не вистачає дійсного значення коефіцієнта тертя  $f$ .

2) Для визначення коефіцієнта тертя спочатку отримаємо підтвердження правильності нового рівняння тертя гнучкого тіла.

А саме, знайдемо нормальну реакцію на шарнірі привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу у відповідності до нового рівняння тертя гнучких тіл 2007 р., яка за умовою рівноваги сил механічної системи, становить  $(S_1+S_2)$ :

$$N_x = \int_0^\pi S(a) \sin(a) da = \int_0^\pi \left( S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\pi} a \right) \sin(a) da = S_2 (-\cos(a)) / \pi_0 +$$

$$+ \frac{S_1 - S_2}{\pi} \cdot (\sin(a) - a \cdot \cos(a)) / \pi_0 = 2 \cdot S_2 + S_1 - S_2 = S_1 + S_2.$$

Звідси, нове рівнянням тертя гнучких тіл за реакцією на шарнірі привідного блоку конвейера у напрямку транспортування вантажу є правильним і може бути використане для визначення інших параметрів тертя гнучких тіл, наприклад, нормальної реакції між гнучким тілом і блоком, коефіцієнта тертя та тягового зусилля на привідному блоці та ін.

Знайдемо дійсну нормальну реакцію на контактні гнучкого тіла з привідним блоком та коефіцієнт тертя між гнучким тілом і привідним блоком за новим рівнянням тертя гнучких тіл:

$$N_o = \int_0^\pi S(a) \cdot da = \int_0^\pi \left( S_2 + \frac{S_1 - S_2}{\pi} a \right) \cdot da = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot \varphi = 4396 \text{ Н}.$$

$$f = \frac{F}{N} = \frac{S_1 - S_2}{N} = \frac{2200 - 600}{4396} = 0,36.$$

Для ще одного підтвердження правильності нового рівняння тертя гнучких тіл визначимо, зокрема, тягове зусилля на привідному блоці  $F_{н-с}$  чи силу тертя  $F$ , яке, як відомо, повинно складати  $S_1 - S_2 = 1600$  Н:

$$F = f \cdot \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = f \cdot N = 0,36 \cdot 4396 \cong 1600 \text{ Н} .$$

Тому значення тягового зусилля на привідному блоці за новим рівнянням тертя гнучких тіл також відповідає умові рівноваги механічної системи.

Тому нормальна реакцію на шарнірі привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу у відповідності до рівняння Ейлера складає:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_0^{\pi} S(a) \cdot \sin(a) \cdot da = \int_0^{\pi} S_2 \cdot e^{f \cdot a} \cdot \sin(a) \cdot da = \\ &= \left( \frac{S_2 \cdot e^{f \cdot \varphi}}{f^2 + 1} (f \cdot \sin(a) - \cos(a)) \right) /_0^{\pi} = \frac{S_2 \cdot (e^{f \cdot \pi} - 1)}{f^2 + 1} = 1113,4 \text{ Н} . \end{aligned}$$

Методична похибка визначення розшукуваної реакції на шарнірі привідного блоку у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{N_x} = N_x - N_0 = 1113,4 - 2800 = -1686,6 \text{ Н} = -60,24\% .$$

3) Знайдемо нормальну реакцію на контактні гнучкого тіла з привідним блоком у відповідності до рівняння Ейлера за формулою:

$$N = \int_0^{\pi} S(a) \cdot da = \int_0^{\pi} S_2 \cdot e^{f \cdot a} \cdot da = S_2 \frac{1}{f} e^{f \cdot a} /_0^{\pi} = \frac{S_2}{f} (e^{f \cdot \pi} - 1) = 3494,8 \text{ Н}$$

Методична похибка визначення реакції у відповідності до рівняння Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_0 = 3494 - 4396 = -901,2 \text{ Н} = -20,50\% .$$

4) Розрахуємо тягове зусилля на привідному блоці за рівнянням Ейлера:

$$F = S_2 \cdot (e^{f \cdot \varphi} - 1) = 1258,1 \text{ Н}$$

Тому методична похибка знаходження тягового зусилля у відповідності до рівняння Ейлера складає:

$$\Delta_F = F - F_0 = 1258,1 - 1600 = -341,9 \text{ Н} = -21,36\% .$$

Таким чином, відоме рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера 1775 р. за реакцією на шарнірі привідного блоку конвейера в напрямку транспортування вантажу, нормальною реакцію на контактні гнучкого тіла з привідним блоком, коефіцієнтом тертя між гнучким тілом та привідним блоком і тяговим зусиллям на привідному блоці є помилковим - неправильним.

### Приклад 2.3.

*Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції (P), реакції (R<sub>x</sub>) на привідній станції, максимальне зусилля натягування (F<sub>max</sub>) конвеєрної стрічки та тягове зусилля (F<sub>н-с</sub>) горизонтального стрічкового конвеєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до діючої методики розрахунку конвеєрів з використанням рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для розташування привідної станції в голові конвеєра. Якщо виміряні сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 60 кН та 15 кН, тягове зусилля 75кН, коефіцієнт тертя стрічки по блоку – 0,3, кут обхвату стрічкою блока – 400<sup>0</sup>, мінімальне натягування стрічки за умовою провисання - 3кН, коефіцієнт запасу тягової спроможності 1,0.*

Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра з розташування привідної станції в голові, рис.2.1.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока для реалізації заданого тягового зусилля за діючою методикою розрахунку стрічкового конвеєра з використанням рівняння Ейлера в задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку за формулою:

$$F_{1\min,cy} = \frac{F_0 \cdot k_t}{e^{f \cdot \varphi} - 1} = \frac{75 \cdot 1,0}{2,71^{0,3 \cdot 6,98} - 1} = 10,5 \text{ кН}.$$

3. У відповідності з новим розв'язанням класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по блоку за запропонованою методикою – новим рівнянням тертя гнучкого тіла, що враховує закон тертя тіл Кулона (1779 р.) і сучасною редакцією закону збереження механічної енергії (19 століття), які було введено після виведень вченого:

а) знайдемо дійсне мінімальне зусилля натягування на привідному блоці горизонтального стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ), яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{\min,cy} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} = 71,6 \text{ кН}$$

б) при цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1\min,cy} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min,cy}}{2} - \frac{F_0}{2} = -1,7 \text{ кН}.$$

в) вибираємо вісь провисання:  $F_{\min,np} = 3 \text{ кН}$ .

4. Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис. 2.4.:

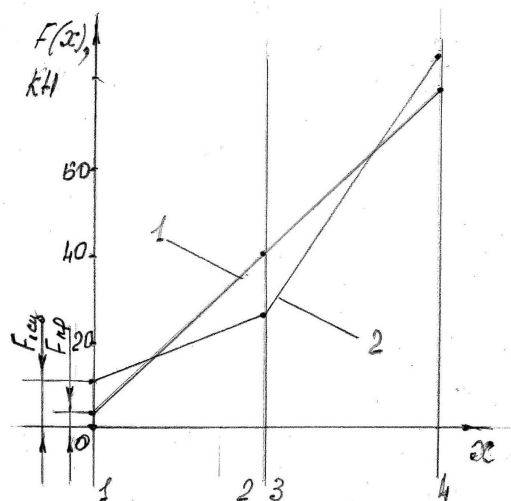


Рис. 2.4. Діаграми натягу стрічки горизонтального конвеєра для розташування привідної станції в голові конвеєра: 1 - за запропонованим методом Р, ( $F_1 + F_4$ ),  $R_x$  складає 81 кН, та  $F_{\max} = 78$  кН; 2 - за діючим методом:  $P = 51$  кН; ( $F_1 + F_4$ ) й  $R_x$  складає 96 кН та  $F_{\max} = 85,5$  кН відповідно.

5. З побудованої діаграми:

а) за діючою методикою знайдемо зусилля натягування на натяжній (Р), привідній ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки:  $P = 51$  кН; ( $F_1 + F_4$ ),  $R_x = 96$  кН та  $F_{\max} = 85,5$  кН відповідно.

б) за новою методикою знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції (Р), привідній станції ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ), максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ )



конвеєрної стрічки, а також розрахуємо дійсне тягове зусилля горизонтального стрічкового конвеєра за діючою методикою  $F_{н-с}$ :  $P = 96 \text{ кН}$ ,  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 81 \text{ кН}$ ,  $F_{max} = 78 \text{ кН}$ ,  $F_{н-с} = 53,4 \text{ кН}$ .

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{P}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{51}{2} = 53,4 \text{ кН} .$$

6. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера - натягування на натяжній станції (P) та привідній станції ( $F_1 + F_4$ ), реакції ( $R_x$ ), максимального зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягового зусилля горизонтального стрічкового конвеєра  $F_{н-с}$  складають:

$$\Delta_{метP} = P - P_0 = 51 - 81 = -30 \text{ кН} = -37,0\% .$$

$$\Delta_{метR_x} = R_x - R_{x0} = 96 - 81 = 15 \text{ кН} = 15,6\% .$$

$$\Delta_{F_{max}} = F_{max} - F_{max0} = 85,5 - 78 = 7,5 \text{ кН} = 9,6\% .$$

$$\Delta_{F_{н-с}} = F_{н-с} - F_0 = 53,4 - 75 = -21,6 \text{ кН} = -28,8\% .$$

#### Приклад 2.4.

*Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції (P), реакції ( $R_x$ ) на привідній станції, максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягове зусилля ( $F_{н-с}$ ) горизонтального стрічкового конвеєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до діючої методики розрахунку конвеєрів з використанням рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для розташування привідної станції в хвості конвеєра. Якщо виміряні сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 60 кН та 15 кН, тягове зусилля 75 кН, коефіцієнт тертя стрічки по блоку – 0,3, кут обхвату стрічкою блока –  $400^\circ$ , мінімальне натягування стрічки за умовою провисання - 3 кН, коефіцієнт запасу тягової спроможності 1,0.*

Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра, рис. 2.1. з розташування привідної станції в голові.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока для реалізації заданого тягового зусилля за діючою методикою розрахунку стрічкового конвеєра з використанням рівняння Ейлера в задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку за формулою:

$$F_{1\text{min},cy} = \frac{F_0 \cdot k_t}{e^{f \cdot \varphi} - 1} = \frac{75 \cdot 1,0}{2,71^{0,3 \cdot 6,98} - 1} = 10,5 \text{ кН} .$$

3. У відповідності з новим розв'язанням класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по блоку за запропонованою методикою, що враховує закон тертя тіл Кулона (1779 р.) і сучасною редакцією закону збереження механічної енергії (19 століття), які було введено після виведень вченого:

а) знайдемо дійсне мінімальне зусилля натягування на привідному блоці горизонтального стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ), яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{\text{min},cy} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} = \frac{2 \cdot 75 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} = 71,6 \text{ кН}$$

б) при цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1\min,цч} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min,ч}}{2} - \frac{F_0}{2} = -1,7\text{кН}.$$

в) вибираємо вісь провисання:  $F_{\min,пр} = 3\text{кН}$ .

4. Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис. 2.5.:

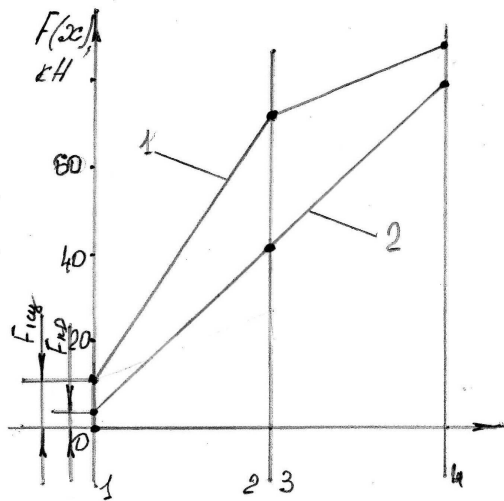


Рис. 2.5. Діаграми натягу стрічки горизонтального конвеєра для розташування привідної станції в хвості конвеєра: 1 - за запропонованим методом  $P$ ,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складає  $81\text{кН}$ , та  $F_{\max} = 78\text{кН}$ ; 2 - за діючим методом:  $P = 141\text{кН}$ ;  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 96\text{кН}$  та  $F_{\max} = 85,5\text{кН}$  відповідно.

5. З побудованої діаграми:

а) за діючою методикою знайдемо зусилля натягування на натяжній ( $P$ ), привідній ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки:  $P = 141\text{кН}$ ;  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 96\text{кН}$  та  $F_{\max} = 85,5\text{кН}$  відповідно.

б) за новою методикою знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції ( $P$ ), привідній станції ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ), максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки, а також розрахуємо дійсне тягове зусилля горизонтального стрічкового конвеєра за діючою методикою  $F_{н-с}$ :  $P = 96\text{кН}$ ,  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 81\text{кН}$ ,  $F_{\max} = 78\text{кН}$ ,  $F_{н-с} = 147,6\text{кН}$ .

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{P}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{141}{2} = 147,6\text{кН}.$$

6. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера - натягування на натяжній станції ( $P$ ) та привідній станції ( $F_1 + F_4$ ), реакції ( $R_x$ ), максимального зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки та тягового зусилля горизонтального стрічкового конвеєра  $F_{н-с}$  складають:

$$\Delta_{\text{мет}P} = P - P_0 = 141 - 81 = 60\text{кН} = +74,1\%.$$

$$\Delta_{\text{мет}R_x} = R_x - R_{x0} = 96 - 81 = 15\text{кН} = 15,6\%.$$

$$\Delta_{F_{\max}} = F_{\max} - F_{\max0} = 85,5 - 78 = 7,5\text{кН} = 9,6\%.$$

$$\Delta_{F_{н-с}} = F_{н-с} - F_0 = 147,6 - 75 = 72,6\text{кН} = 96,8\%.$$

### Приклад 2.5.

Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції ( $P$ ), реакції ( $R_x$ ) на

привідній станції, максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягове зусилля ( $F_{н-с}$ ) горизонтального стрічкового конвеєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до діючої методики розрахунку конвеєрів з використанням рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для розташування привідної станції в голові конвеєра. Якщо сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 20 кН та 5 кН, тягове зусилля 25кН, коефіцієнт тертя стрічки по блоку – 0,3, кут обхвату стрічкою блока –  $400^{\circ}$ , мінімальне натягування стрічки за умовою провисання - 3кН, погона маса стрічки  $q$  – 39 кг/м, швидкість руху стрічки – 8 м/с, коефіцієнт запасу тягової спроможності 1,0.

.Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра з розташування привідної станції в голові, рис.2.1.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока для реалізації заданого тягового зусилля за методикою розрахунку стрічкового конвеєра з використанням рівняння Ейлера в задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку за формулою:

$$F_{1min,ц} = \frac{F_0 \cdot k_t}{e^{f \cdot \varphi} - 1} = \frac{25 \cdot 1,0}{2,71^{0,3 \cdot 6,98} - 1} = 3,5кН.$$

3. У відповідності з новим розв'язанням класичної задачі Ейлера про ковзання гнучкого тіла по блоку за запропонованою методикою, що враховує закон тертя тіл Кулона (1779 р.) і сучасну редакцію закону збереження механічної енергії (19 століття), які було введено після виведень вченого:

а) знайдемо дійсне мінімальне зусилля натягування на привідному блоці горизонтального стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ), яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{min,ц} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} + 2qv^2 = \frac{2 \cdot 25 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} + 5,0 = 28,9кН$$

б) при цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1min,ц} = \frac{(F_1 + F_4)_{min,ц}}{2} - \frac{F_0}{2} = 14,45 - 12,5 = 1,95кН..$$

в) вибираємо вісь провисання:  $F_{min,пр} = 3кН$ .

г) проводимо вісь «відцентрових сил»:  $F_{min,пр} + qv^2 = 3,0 + 2,5 = 5,5 кН$ .

4. Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис 2.6.

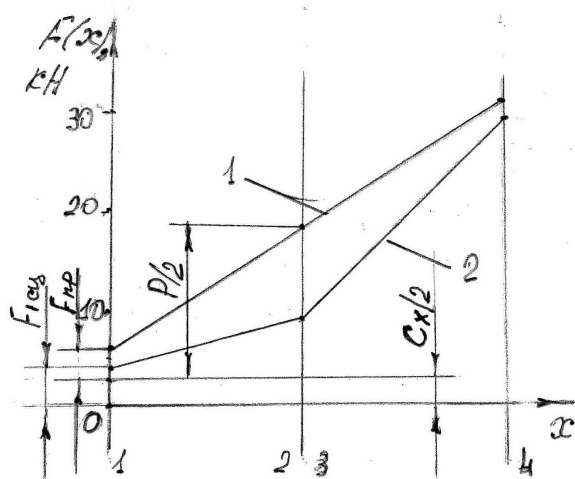


Рис. 2.6. Діаграми натягу стрічки горизонтального конвейєра для розташування привідної станції в голові конвейєра: 1 - за запропонованим методом  $P=31$  кН,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складають 36 кН, та  $F_{max} = 30,5$  кН; 2 - за діючим методом:  $P = 17$  кН;  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складає 32 кН, а  $F_{max} = 28,5$  кН.

5. З побудованої діаграми:

а) за діючою методикою знайдемо зусилля натягування на натяжній (P), привідній  $(F_1+F_4)$  чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки:  $P = 17$  кН;  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складає 32 кН та  $F_{max} = 28,5$  кН.

г) за новою методикою знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції (P), привідній станції  $(F_1+F_4)$  чи реакцію ( $R_x$ ), максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки, а також розрахуємо дійсне тягове зусилля горизонтального стрічкового конвеєра за діючою та новою методикою  $F_{н-с}$ :  $P = 31$  кН,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складає 36 кН та  $F_{max} = 30,5$  кН й  $F_{н-с}$  дорівнює 12,6 та 32,5 кН відповідно:

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{P - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{17 - 5}{2} = 12,6 \text{ кН} .$$

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{R_x - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{36 - 5}{2} = 32,5 \text{ кН} .$$

6. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера - натягування на натяжній станції (P) та привідній станції  $(F_1+F_4)$ , реакції ( $R_x$ ), максимального зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягового зусилля горизонтального стрічкового конвеєра  $F_{н-с}$  складають:

$$\Delta_{метP} = P - P_0 = 17 - 36 = -19 \text{ кН} = -52,8\% .$$

$$\Delta_{метR_x} = R_x - R_{x0} = 32 - 36 = -4 \text{ кН} = -11,1\% .$$

$$\Delta_{F_{max}} = F_{max} - F_{max0} = 28,5 - 30,5 = -2,0 \text{ кН} = -6,6\% .$$

$$\Delta_{F_{н-с}} = F_{н-с} - F_0 = 12,6 - 32,5 = -19,9 \text{ кН} = -61,2\% .$$

### Приклад 2.6.

Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції (P), реакції ( $R_x$ ) на привідній станції та максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки горизонтального стрічкового конвейєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до нового рівняння тертя гнучких тіл з врахуванням відцентрових сил для розташування привідної станції в голові конвейєра. Якщо сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 20 кН та 5 кН, тягове зусилля 25 кН, коефіцієнт тертя стрічки по блоку – 0,3, кут обхвату стрічкою блока –  $400^\circ$ , мінімальне натягування стрічки за умовою провисання - 3 кН, ширина стрічки – 2,5 м, маса 1 м<sup>2</sup> стрічки – 39 кг/м<sup>2</sup>, швидкість руху стрічки – 8 м/с, коефіцієнт запасу тягової спроможності 1,0.

.Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра з розташування привідної станції в голові, рис.2.1.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування на привідному блоці горизонтального стрічкового конвеєра  $(F_1 + F_4)$  за новим рівнянням тертя гнучких тіл без врахування відцентрових сил:

$$(F_1 + F_4)_{\min, \text{cy}} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} = 23,9 \text{кН}$$

при цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1\min, \text{cy}} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min, \text{cy}}}{2} - \frac{F_0}{2} = 11,95 - 12,5 = -0,55 \text{кН}.$$

вибираємо вісь провисання:  $F_{\min, \text{np}} = 3 \text{кН}$ .

3. Знайдемо мінімальне зусилля натягування на привідному блоці горизонтального стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ) за новим рівнянням тертя гнучких тіл з врахуванням відцентрових сил, яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{\min, \text{cy}} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} + 2qv^2 = \frac{2 \cdot 25 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} + 12,5 = 36,4 \text{кН}$$

При цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1\min, \text{cy}} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min, \text{cy}}}{2} - \frac{F_0}{2} = 18,2 - 12,5 = 5,7 \text{кН}.$$

Але для надійності роботи конвеєра в період пуску тягового двигуна зусилля натягування стрічки без врахування швидкості руху стрічки не повинно бути меншим  $3 \text{кН}$ . Тобто,  $F_{1\min, \text{зч}} = F_{\min, \text{np}} + qv^2 = 3 + 6,25 = 9,25 \text{кН}$ .

4. Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис 2.7.

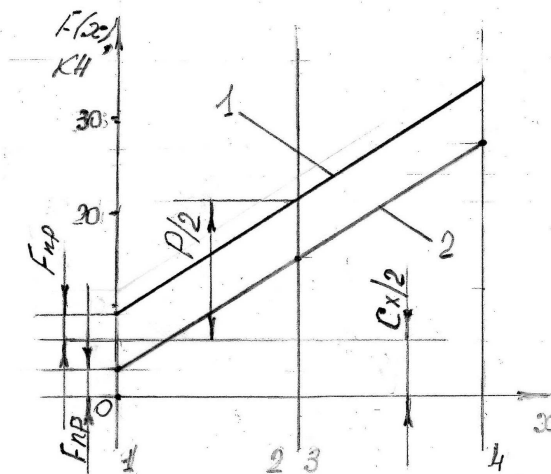


Рис. 2.7. Діаграми натягу стрічки горизонтального конвеєра для розташування привідної станції в голові конвеєра: 1 - з врахуванням відцентрових сил:  $P = 31 \text{кН}$ ,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складають  $43,5 \text{кН}$ , та  $F_{\max} = 34,25 \text{кН}$ ; 2 - без врахування відцентрових сил:  $P$ ,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складають  $31 \text{кН}$ , а  $F_{\max} = 28 \text{кН}$ .

5. З побудованої діаграми:

а) знайдемо зусилля натягування на натяжній ( $P$ ), на привідній ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки з врахуванням відцентрових сил:  $P$ ,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складають  $43,5 \text{кН}$  та  $F_{\max} = 34,25 \text{кН}$ .

б) знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції ( $P$ ), привідній станції ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) та максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки, а також розрахуємо дійсне тягове зусилля горизонтального стрічкового конвеєра за

діючою методикою  $F_{н-с}$ :  $P$ ,  $(F_1 + F_4)$  й  $R_x$  складає 31,0 кН,  $F_{max} = 28,0$  кН та та  $F_{max} = 30,5$  кН й  $F_{н-с} = 19,4$  кН:

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{R - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{31 - 12,5}{2} = 19,4 \text{ кН} .$$

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{R - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{43,5 - 12,5}{2} = 27,2 \text{ кН} .$$

3. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за новим рівнянням тертя гнучких тіл без врахування відцентрових сил - натягування на натяжній станції (P) та привідній станції ( $F_1+F_4$ ), реакції ( $R_x$ ), максимального зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягового зусилля стрічкового конвеєра  $F_{н-с}$  складають:

$$\Delta_{метP} = P - P_0 = 31 - 31 = 0 \text{ кН} = 0\% .$$

$$\Delta_{метRx} = R_x - R_{x0} = 31,0 - 43,5 = -12,5 \text{ кН} = -28,7\% .$$

$$\Delta_{F_{max}} = F_{max} - F_{max0} = 28 - 34,25 = -6,25 \text{ кН} = -18,2\% .$$

$$\Delta_{F_{н-с}} = F_{н-с} - F_0 = 19,4 - 27,2 = -7,8 \text{ кН} = -28,7\% .$$

### Приклад 2.7.

Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції (P), реакції ( $R_x$ ) на привідній станції та максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки стрічкового конвеєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до діючої методики розрахунку конвеєрів з використанням рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для розташування привідної станції в голові конвеєра. Якщо сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 240 кН та -30 кН, тягове зусилля 210 кН, гравітаційна складова вантажу та стрічки ( $q_x, q_{0x}$ ) 180 та 45 кН, кут нахилу траси  $18^\circ$ , коефіцієнт тертя стрічки по блоку – 0,3, кут обхвату стрічкою блока –  $400^\circ$ , мінімальне натягування стрічки по умові провисання - 3кН, коефіцієнт запасу тягової спроможності 1,0.

Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра з розташування привідної станції в голові рис.2.8.

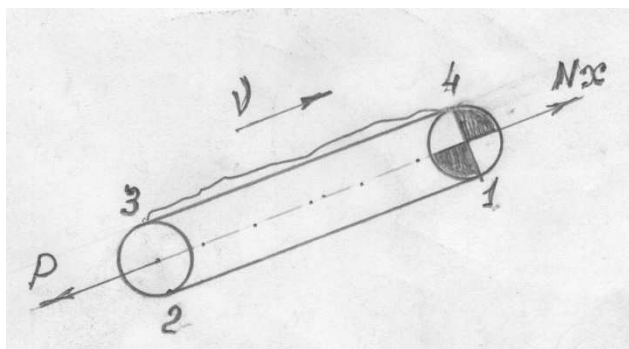


Рис. 2.8. Розрахункова схема конвеєра з розташування привідної станції в голові: 1,2,3 та 4 – характерні точки конвеєра; P – сила попереднього натягування на натяжній станції;  $N_x$  - розрахункова складова реакції на привідній станції в напрямку транспортування; v – швидкість транспортування.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока для реалізації заданого тягового зусилля за методикою розрахунку стрічкового

конвеєра, яка враховує рівняння Ейлера в задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку за формулою:

$$F_{1\min,цл} = \frac{F_0 \cdot k_t}{e^{f \cdot \varphi} - 1} = \frac{210 \cdot 1,0}{2,71^{0,3 \cdot 76,98} - 1} = 29,51 \text{кН}.$$

3) У відповідності з новим рівнянням тертя гнучкого тіла знайдемо дійсне мінімальне зусилля натягування на привідному блоці стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ), яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{\min,цл} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} = \frac{2 \cdot 210 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} = 200,5 \text{кН}$$

при цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1\min,цл} = \frac{(F_1 + F_4)_{\min,цл}}{2} - \frac{F_0}{2} = 200,25 - 105 = -4,75 \text{кН}.$$

вибираємо  $F_{1\min,цл} = F_{\min,пр} = 3 \text{кН}$ .

4. Знайдемо різницю між зусиллям натягування стрічки та реакцією на натяжній та привідній станціях:

$$G_x = q \cdot l \cdot g \cdot \sin(a) = 225 \text{кН}.$$

5. Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис. 2.9.:

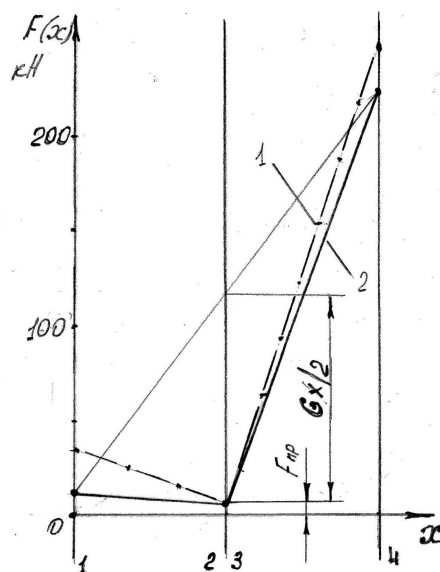


Рис. 2.9. Діаграми натягу стрічки конвеєра для розташування привідної станції в голові конвеєра: 1 - за діючим методом:  $P = 6 \text{кН}$ ;  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 276 \text{кН}$  та  $F_{\max} = 243 \text{кН}$  відповідно; 2 - за запропонованим методом:  $P = 6 \text{кН}$ ,  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 231,0 \text{кН}$ , та  $F_{\max} = 220,5 \text{кН}$ .

5. З побудованої діаграми:

а) знайдемо зусилля натягування на натяжній ( $P$ ) та привідній ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки за діючою методикою:  $P = 6 \text{кН}$ ;  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 276 \text{кН}$  та  $F_{\max} = 243 \text{кН}$  відповідно.

в) знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції ( $P$ ), привідній станції ( $F_1 + F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) та максимальне зусилля натягування ( $F_{\max}$ ) конвеєрної стрічки стрічкового конвеєра за діючою методикою  $F_{н-с}$ :  $P = 6 \text{кН}$ ,  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 231,0 \text{кН}$ , та

$$F_{max} = 220,5 \text{ кН}$$

3. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера - натягування на натяжній станції (P) та привідній станції ( $F_1 + F_4$ ), реакції ( $R_x$ ) та максимального зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки складають:

$$\Delta_{метP} = P - P_0 = 6 - 6 = 0 \text{ кН} = 0\%.$$

$$\Delta_{метR_x} = R_x - R_{x0} = 276 - 231,0 = 45,0 \text{ кН} = 19,5\%.$$

$$\Delta_{F_{max}} = F_{max} - F_{max0} = 243 - 220,5 = 22,5 \text{ кН} = 10,2\%.$$

### Приклад 2.8.

Знайти розрахункове зусилля натягування на натяжній станції (P), реакції ( $R_x$ ) на привідній станції, максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягове зусилля ( $F_{н-с}$ ) стрічкового конвеєра і методичні похибки непрямого вимірювання цих параметрів відповідно до діючої методики розрахунку конвеєрів з використанням рівняння тертя гнучких тіл Ейлера для розташування привідної станції у хвості конвеєра. Якщо сили тяги для переміщення вантажної та холостої гілок складають 240 кН та -30 кН, тягове зусилля 210 кН, гравітаційна складова вантажу та стрічки ( $q_x, q_{0x}$ ) 180 та 45 кН, кут нахилу траси  $18^\circ$ , коефіцієнт тертя стрічки по блоку - 0,3, кут обхвату стрічкою блока -  $400^\circ$ , мінімальне натягування стрічки по умові провисання - 3кН, коефіцієнт запаса тягової спроможності 1,0.

Розв'язання:

1. Розглянемо розрахункову схему стрічкового конвеєра, рис. 2.8. з розташуванням привідної станції у хвості.

2. Знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока для реалізації заданого тягового зусилля за методикою розрахунку стрічкового конвеєра з використанням рівняння Ейлера в задачі про ковзання гнучкого тіла по блоку за формулою:

$$F_{1min,ц} = \frac{F_0 \cdot k_t}{e^{f \cdot \varphi} - 1} = \frac{210 \cdot 1,0}{2,71^{0,3 \cdot 76,98} - 1} = 29,5 \text{ кН}.$$

3. У відповідності з новим рівнянням тертя гнучкого тіла знайдемо дійсне мінімальне зусилля натягування на привідному блоці стрічкового конвеєра ( $F_1 + F_4$ ), яке забезпечує реалізацію заданого тягового зусилля:

$$(F_1 + F_4)_{min,ц} = \frac{2 \cdot F_0 \cdot k_t}{f \cdot \varphi} = \frac{2 \cdot 210 \cdot 1,0}{0,3 \cdot 6,98} = 200,5 \text{ кН}$$

При цьому знайдемо мінімальне зусилля натягування стрічки в точці збігання з привідного блока:

$$F_{1min,ц} = \frac{(F_1 + F_4)_{min,ц}}{2} - \frac{F_0}{2} = 200,5 - 105 = -4,7 \text{ кН}.$$

Вибираємо  $F_{1min,ц} = F_{min,пр} = 3 \text{ кН}$ .

4) Знайдемо різницю між зусиллям натягування стрічки та реакцією на натяжній та привідній станціях:

$$G_x = q \cdot l \cdot g \cdot \sin(a) = 225 \text{ кН}.$$

5) Накреслимо діаграму натягування стрічки конвеєра за діючою і запропонованою методикою, рис. 2.10.:



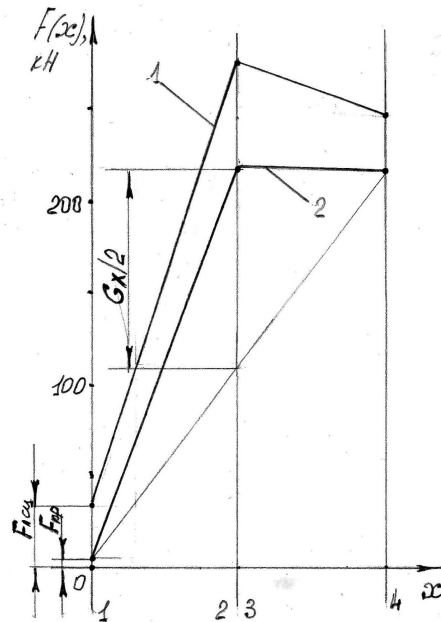


Рис. 2.10. Діаграми натягу стрічки конвейера для розташування привідної станції в хвості конвейера: 1 - за діючим методом:  $P = 539$  кН;  $(F_1 + F_4)$  та  $R_x$  складає: 269,0 кН та  $F_{max} = 269,5$  кН відповідно 4 - за запропонованим методом:  $P = 441,0$  кН,  $(F_1 + F_4)$ ,  $R_x = 216$  кН, та  $F_{max} = 220,5$  кН.

5. З побудованої діаграми:

а) знайдемо зусилля натягування на натяжній ( $P$ ) та привідній ( $F_1+F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ) станціях і максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки за діючою методикою:  $P = 539$  кН;  $(F_1 + F_4)$  та  $R_x$  складає: 269,0 кН та  $F_{max} = 269,5$  кН відповідно.

в) знайдемо дійсні зусилля натягування на натяжній станції ( $P$ ), привідній станції ( $F_1+F_4$ ) чи реакцію ( $R_x$ ), максимальне зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки, а також розрахуємо дійсне тягове зусилля стрічкового конвеєра за діючою методикою  $F_{н-с}$ :  $P=441$  кН,  $(F_1+F_4)$  та  $R_x$  складає 216 кН, та  $F_{max} = 220,5$  кН,  $F_{н-с} = 328,8$  кН.

$$F_{н-с} = f \cdot \varphi \cdot \frac{P - G_x}{2} = 0,3 \cdot 6,98 \cdot \frac{539 - 225}{2} = 328,8 \text{ кН} .$$

6. Тому, методичні складові похибки непрямого вимірювання параметрів тертя гнучкого тіла за рівнянням тертя гнучких тіл Ейлера - натягування на натяжній станції ( $P$ ) та привідній станції ( $F_1+F_4$ ), реакції ( $R_x$ ), максимального зусилля натягування ( $F_{max}$ ) конвеєрної стрічки та тягового зусилля стрічкового конвеєра  $F_{н-с}$  складають:

$$\Delta_{метP} = P - P_0 = 539 - 441 = 98 \text{ кН} = 22,2\% .$$

$$\Delta_{метRx} = R_x - R_{x0} = 269 - 216 = 53 \text{ кН} = 24,5\% .$$

$$\Delta_{F_{max}} = F_{max} - F_{max0} = 269,5 - 220,5 - 220,5 = 49 \text{ кН} = 22,2\% .$$

$$\Delta_{F_{н-с}} = F_{н-с} - F_0 = 328,9 - 210 = 118,9 \text{ кН} = 56,6\% .$$

### Приклад 2.9.

Дати оцінку методичної складової систематичної похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .

Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11.

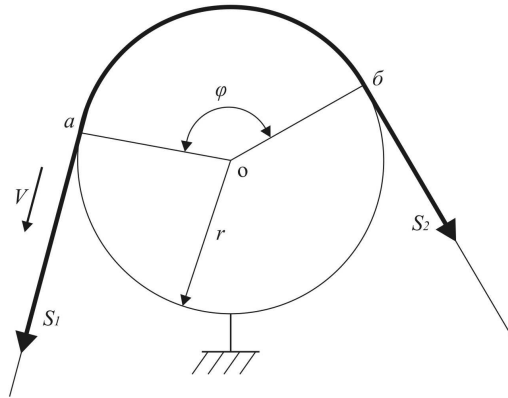


Рис. 2.11. Розрахункова схема:  $S_1$ ,  $S_2$  – більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла (натягування в збігаючій й набігаючій на блок гілках гнучкого тіла) при ковзанні;  $r$  - радіус блоку;  $\varphi$  - кут обхвату блоку гнучким тілом;  $v$  - напрямок руху.

Згідно з доведеннями Ейлера коефіцієнт тертя між гнучким тілом (невагомої, нерозтяжною й абсолютно гнучкою ниткою) та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200}{600} = \frac{1,22}{3,14} = 0,41.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера коефіцієнт тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя складає:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{\mu} = \mu - \mu_{\partial} = 0,41 - 0,36 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{\mu_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{0,05}{0,36} \cdot 100\% \cong -14,0\%.$$

### Приклад 2. 10.

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^{\circ}$ , швидкість руху стрічки  $v$  – 1 м/с, погонна маса стрічки  $q$  – 7,6 кг/м.

### Розв'язання

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. Згідно з доведеннями Ейлера (та впливом відцентрових сил стрічки) коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямым вимірюванням за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1 - q \cdot v^2}{S_2 - q \cdot v^2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200 - 7,6 \cdot 1^2}{600 - 7,6 \cdot 1^2} = 0,42.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера визначається з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ кГ}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{\mu} = \mu - \mu_{\partial} = 0,42 - 0,37 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{\mu_{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{0,05}{0,37} \cdot 100\% \cong 13,5\%.$$

### Приклад 2.11.

*Дати оцінку методичної складової систематичної похибки непрямого вимірювання сили тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200 \text{ Н}$ ,  $S_2=600 \text{ Н}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^{\circ}$ .*

### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. Згідно з доведеннями Ейлера розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться за формулою:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu \varphi} - 1).$$

По новому розв'язанню задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 0,314 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ H}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ H}$$

Тоді:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu\varphi} - 1) = 600 (2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 1258 \text{ H}$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_{\partial} = 1258 - 1600 = -332 \text{ H}$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_E}{F_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{332}{1600} \cdot 100\% \cong -21\%.$$

### Приклад 2.12

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = 2200 \text{ H}$ ,  $S_2 = 600 \text{ H}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v = 1 \text{ м/с}$ , погона маса стрічки  $q = 7,6 \text{ кг/м}$ .

#### Розв'язання

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання. Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11

В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямым вимірюванням за формулою:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu\varphi} - 1).$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}}.$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, знаходиться з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,314 \cdot \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ H}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ H}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu\varphi} - 1) = (600 - 7,6 \cdot 1,0^2) \cdot (2,71^{0,373,14} - 1) = 1300 \text{ Н}.$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_\delta = 1300 - 1600 = -300 \text{ кГ};$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_F}{F_\delta} \cdot 100\% \cong -\frac{300}{1600} \cdot 100\% \cong -18,8\%.$$

### Приклад 2.13.

*Дати оцінку методичної складової систематичної похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200 \text{ Н}$ ,  $S_2=600 \text{ Н}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .*

#### Розв'язання

В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряму залежать фрикційні властивості.

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами знаходиться з виразу:

$$N = \int_0^\varphi S(\alpha) d\alpha = \int_0^\varphi S_2 \cdot e^{\mu\alpha} d\alpha = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu\varphi} - 1)$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_\delta}{N_\delta}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_\delta = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\delta = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\delta = \frac{F_\delta}{N_\delta} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Звідси нормальна реакція між тілами за доведеннями Ейлера складає:

$$N = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu\varphi} - 1) = \frac{600}{0,36} (2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 3495 \text{ Н}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_\delta = 3495 - 4396 = -901 \text{ Н};$$

$$\Delta_{N, \%} = \frac{\Delta_N}{N_\delta} \cdot 100\% \cong -\frac{901}{4396} \cdot 100\% \cong -20,5\%.$$

### Приклад 2.14.

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання нормальної реакції між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погонна маса стрічки  $q = 7,6$  кг.

#### Розв'язання

В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряду залежать фрикційні властивості.

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами з врахуванням відцентрових сил знаходиться з виразу:

$$N = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1).$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial}.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера нормальна реакція між тілами складає:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}.$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Звідки нормальна реакція між тілами за рівнянням Ейлера складає:

$$N = \int_0^\varphi S(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) = \frac{600 - 7,6 \cdot 1,0^2}{0,37} \cdot (2,71^{0,37 \cdot 3,14} - 1) = 3513 \text{ Н}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_\partial = 3513 - 4372 = 858 \text{ Н};$$

$$\Delta_{N, \%} = \frac{\Delta_N}{N_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{858}{4372} \cdot 100\% \cong -19,6\%.$$

### Приклад 2.15.

Знайти методичну складову систематичної похибки вимірювання зусилля натягування нитки  $S(\alpha)$  на середині контакту при її ковзанні по барабану на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. Згідно з виведеннями Ейлера, натягування гнучкого тіла по лінії контакту з барабаном визначається функцією:

$$S(\alpha) = S_2 e^{\mu \cdot \alpha}$$

де  $S(\alpha)$  – зусилля натягування гнучкого тіла в заданому перетині гнучкого тіла;  $\varphi$  – кут обхвата барабана гнучким тілом;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_0}{N_0}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_0 = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_0 = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_0 = \frac{F_0}{N_0} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, натягування гнучкого тіла по середній лінії контакту при терті по блоку за рівнянням Ейлера складає:

$$S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = S_2 \cdot e^{\mu \cdot \varphi / 2} = 600 \cdot 2,71^{0,36 \cdot 1,57} = 1050 \text{ Н}$$

Дійсне натягування гнучкого тіла за новим рівнянням тертя гнучких тіл 2007 р. складає:

$$S(\alpha)_0 /_{a=\frac{\varphi}{2}} = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 = 1400 \text{ Н}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла на середині контакту з блоком складає:

$$\Delta_S = S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} - S(a)_0 /_{a=\frac{\varphi}{2}} = 1050 - 140,0 = -350 \text{ Н};$$

$$\Delta_{S, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}}} \cdot 100\% \cong -\frac{350}{1400} \cdot 100\% \cong -25\%.$$

### Приклад 2.16.

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання зусилля натягування гнучкого тіла  $S(a)$  на середині контакту з блоком при ковзанні по барабану на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200 \text{ Н}$ ,  $S_2=600 \text{ Н}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v - 1 \text{ м/с}$ , погонна маса стрічки  $q - 7,6 \text{ кг}$ .

*Розв'язання.*

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11. В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункове зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном складає:

$$S(a) = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\mu a} + q \cdot v^2.$$

де  $S(\alpha)$  – зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном;  $q$  – лінійна маса гнучкого тіла;  $a$  – кут перетину гнучкого тіла;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами по новому розв'язанню задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, визначається виразом:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

А коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, натягування гнучкого тіла за рівнянням тертя Ейлера складає:

$$S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\frac{\mu \cdot \varphi}{2}} + q \cdot v^2 = (600 - 7,6 \cdot 1,0^2) \cdot 2,71^{0,37 \cdot 1,57} + 7,6 \cdot 1,0^2 = 1066 \text{ Н}.$$

Але дійсне натягування гнучкого тіла за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2 + qv^2.$$

Звідки дійсне розшукуване натягування гнучкого тіла складає:

$$S(\alpha)_{\partial} /_{a=\frac{\varphi}{2}} = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 + qv^2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 + 8 = 1416 \text{ Н}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла складає:

$$\Delta_s = S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} - S(a)_{\partial} /_{a=\frac{\varphi}{2}} = 1066 - 1416 = -336 \text{ Н};$$

$$\Delta_s, \% = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}}} \cdot 100\% \cong -\frac{336}{1416} \cdot 100\% \cong -23,7\%.$$

### Приклад 2.17

*Дати оцінку методичної складової систематичної похибки вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200$  Н,  $S_2=600$  Н, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , діаметр барабана  $0,22$  м, швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погона маса стрічки  $q = 7,6$  кг, товщини стрічки  $h = 1,0$  см, радіус барабана  $r = 0,11$  м.*

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 2.11.

В рамках доведення Ейлера силу тертя між стрічкою та барабаном знаходять за формулою:



$$F = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ Н}$$

де  $F$  – сила тертя між стрічкою та барабаном;  $S_1, S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки.

Але закон тертя гнучких тіл Ейлера справедливий для ідеальної нитки, для якої товщина дорівнює нулю. Тому виникає методична складова систематичної похибки від неврахування товщини стрічки, див. рис. 2.12.

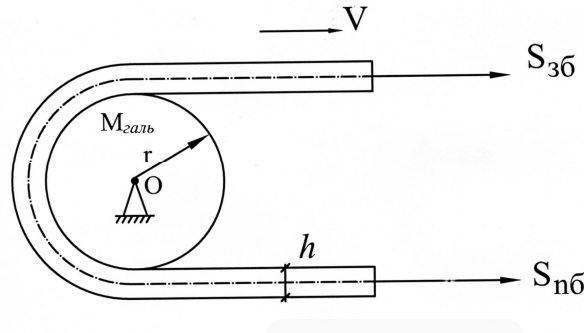


Рис. 2.12 Розрахункова схема взаємодії конвеєрної стрічки та барабана:  $S_1, S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки;  $r$  – радіус барабана;  $v$  – швидкість руху стрічки;  $h$  – товщина гнучкого тіла.

В нашому випадку рівняння рівноваги моментів сил має такий вигляд:

$$\sum M_o = S_1 \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - S_2 \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - M_{\text{галь}} = 0$$

де,  $r$  – радіус барабана;  $t$  – товщина стрічки.

Або:

$$(S_1 - S_2) \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) = F_o \cdot r ;$$

Звідки дійсне значення сили тертя:

$$F_o = \left(r + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \cdot (S_1 - S_2) = \left(1 + \frac{t}{2r}\right) \cdot (S_1 - S_2) = 0,045 \cdot (2200 - 600) = 1670 \text{ Н}$$

Методична складова систематичної похибки складає:

$$\Delta_F = F - F_o = -\frac{t}{2r} \cdot (S_1 - S_2) = -\frac{0,01}{0,22} \cdot (2200 - 600) \cong -0,045 \cdot 160 \cong -72 \text{ Н}$$

$$\Delta_F, \% = \frac{\Delta_F}{F_o} \cdot 100\% \cong -\frac{72}{1670} \cdot 100\% \cong -4,5\%.$$

### Приклад 2.18

Знайти методичну складову систематичної похибки непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзда з масою електровозу  $m_e = 5 \text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_v = 3,1 \text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складу складає  $8 \text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9 \text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску з ухилом  $i = 10\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30 \text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = 8 \text{ км/год}$ .

#### Розв'язання

На рис. 2. 13 представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

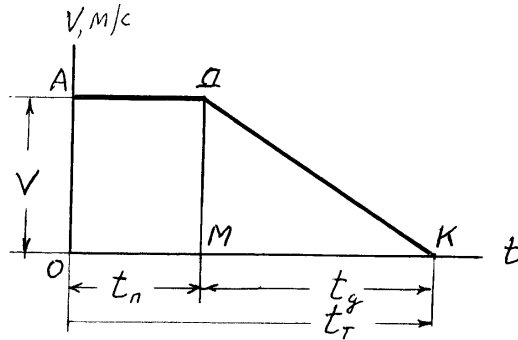


Рис. 2.13. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальма до дії;  $t_d$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування.

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює 3,4 сек);  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзду в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзду при гальмуванні.

Прискорення руху поїзду визначається з рівняння руху поїзду при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8-10 + \frac{9000}{(5+5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,39 \text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху составу.

Звідки:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 - 6,33 = 1,23 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} - (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 - 23,40} + 1,33 \text{ м/с}^2.$$

Тому рівняння не мають розв'язань.

Якщо керуватись допущенням діючої методики - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 6,33 = 13,89 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} + (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 + 23,40} - 1,33 = 5,02 - 1,33 = 3,69 \text{ м/с}^2.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзду в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху поїзду в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений, що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 2.14.:

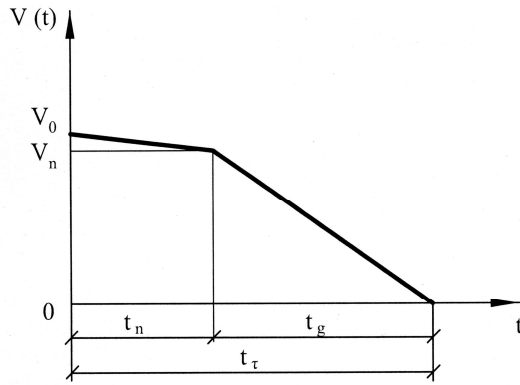


Рис. 2.14. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_\delta$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $V_n$  - швидкість поїзда в момент прикладення гальмівної сили  $B$ .

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^\delta = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} \text{ м.}$$

$$V_{\delta on}^\delta = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)};$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії знаходиться з рівняння руху поїзда в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 10}{110} = +0,02 \text{ м/с}^2.$$

Тому:

$$l_m^\delta = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,02 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,02 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 0,12 + 6,71 = 14,39 \text{ м.}$$

$$V_{\delta on}^\delta = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 +$$

$$+ \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30 + 0,02 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 2340 - 0,09} = -1,36 + 5,01 = 3,65 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзду, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні, складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Тому, методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою складає:

$$\Delta_{\text{сис. l}} = l_m - l_m^\delta = 13,89 - 14,39 = -0,50 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сис. l, \%}} = \frac{\Delta_{\text{сис. l}}}{l_m^\delta} \cdot 100\% \cong \frac{-0,5}{14,39} \cdot 100\% \cong -3,47\%.$$

$$\Delta_{\text{сис. v}} = V_{\delta on} - V_{\delta on}^\delta = 3,69 - 3,65 = 0,04 \text{ м/с}$$

$$\Delta_{\text{сис. в.}} \% = \frac{\Delta_{\text{сис. в.}}}{V_{\text{дон}}^{\text{д}}} \cdot 100\% \cong \frac{0,04}{3,65} \cdot 100\% \cong 1,10\%.$$

### Приклад 2.19.

Дати оцінку правильності непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзду з масою електровозу  $m_e = 5\text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_v = 3,1\text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складу складає  $8\text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9\text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску з ухилом  $i = 45\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30\text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = 8\text{ км/год}$ .

#### Розв'язання

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання.

На рис. 2. 13. представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює  $3,4\text{ сек}$ );  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзду в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзду при гальмуванні.

Прискорення руху поїзда знаходиться з рівняння руху поїзду при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8 - 45 + \frac{9000}{(5 + 5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,072\text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху складу.

Тому:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 - 34,29 = -26,73\text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} - (-0,072) \cdot 3,4 = \sqrt{0,06 - 4,32} + 0,088$$

Тобто рівняння не має розв'язання.

Якщо керуватись допущенням в діючій методиці - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 34,29 = 41,85\text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} + (-0,072) \cdot 3,4 = \sqrt{0,06 + 4,32} - 0,24 = 2,09 - 0,24 = 1,85\text{ м/с}.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзду в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху поїзду в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений, що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 2.14.:

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a}$$

$$V_{\partial on}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)}$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії визначається з рівняння руху поїзду в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 45}{110} = +0,33 \text{ м/с}^2$$

Звідси:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,33 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,33 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 1,91 + 77,56 = 87,03$$

$$V_{\partial on}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 + \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30 + 0,33 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 4,32 - 1,52} = -1,36 + 2,15 - 1,42 = 0,79 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзду, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні, складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою, складає:

$$\Delta_{\text{сис.}l} = l_m - l_m^{\partial} = 41,85 - 87,03 = -45,18 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сис.}l, \%} = \frac{\Delta_{\text{сис.}l}}{l_m^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{-45,18}{87,03} \cdot 100\% \cong -52\%$$

$$\Delta_{\text{сис.}v} = V_{\partial on} - V_{\partial on}^{\partial} = 1,85 - 0,79 = 1,06 \text{ , м/с}$$

$$\Delta_{\text{сис.}v, \%} = \frac{\Delta_{\text{сис.}v}}{V_{\partial on}^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{1,06}{0,79} \cdot 100\% \cong 134\%$$

### ПРИКЛАД 2.20.

*Динамометр має шкалу, відградуйовану в діапазоні 0...100 кГ; позначення класу точності на шкалі: 2,0. Обчислити абсолютну похибку вимірювання сили.*

*Розв'язання*

Така позначка класу точності свідчить про те, що клас точності нормується по зведеній похибці:

$$\delta = \frac{\Delta_x}{N} \cdot 100,$$

де,  $N$  - нормоване значення приладу (діапазон вимірювання).

Тому абсолютна похибка вимірювання

$$\Delta = \frac{k \cdot N}{100} = \frac{2,0 \cdot 100}{100} = \pm 2 \text{кГ}.$$

### Приклад 2.21.

Знайти вид систематичної похибки за наявності функціонального зв'язку між похибкою вимірювання та значенням вимірювальної величини при вимірюванні сили взаємодії між тілами динамометром інструментальна похибка якого складає  $\pm 2 \text{кГ}$ .

*Розв'язання*

При вимірюванні сили взаємодії між тілами динамометром інструментальна похибка якого складає  $\pm 2 \text{кГ}$  інструментальна складова похибки вимірювання розшукуваного параметра дорівнює похибці засобу вимірювання, тобто  $\pm 2 \text{кГ}$  і не залежить від вимірювальної величини.

Тому ця похибка являється адитивною.

### Приклад 2.22.

Знайти вид систематичної похибки при вимірюванні сили тертя між конвеєрною стрічкою та барабаном динамометром на лабораторному стенді для досліджень коефіцієнта тертя з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера за діючою методикою, якщо радіус барабана  $r = 0,11 \text{м}$ , а товщина стрічки ;  $h = 1 \text{см}$ .

*Розв'язання*

В цьому випадку виникає методична складова систематичної похибки від неврахування товщини стрічки, яка як відомо пропорційна вимірювальній величині.

$$\Delta_{\text{сис. ... м}} = -\frac{h}{2r} \cdot (S_1 - S_2).$$

Тому ця похибка являється мультиплікативною.

### ПРИКЛАД 2.23.

Якому класу точності відповідає манометр ДМ 05 з діапазоном вимірювання від 0 до 1,0 МПа, якщо їх приведена похибка складає  $\pm 10 \text{кПа}$ .

*Розв'язання*

Клас точності приладів з суто адитивного характеру похибки нормують по зведеній похибці:

$$k = \delta = \frac{\Delta_x}{N} \cdot 100,$$

де,  $N$  - нормоване значення приладу (діапазон вимірювання).

Тому клас точності манометр ДМ 05 з діапазоном вимірювання від 0 до 1,6 МПа

$$k = \frac{\Delta_x}{N} \cdot 100 = \frac{\pm 10 \cdot 10^3}{1,0 \cdot 10^6} \cdot 100 = 1,0.$$

### ПРИКЛАД 2.24.

Позначення класу точності  $k$  на шкалі омметра:  $\frac{1,5}{\Omega}$ ; шкалу відградувано в діапазоні  $0 \dots \infty \text{кОм}$ ; довжина шкали  $L = 100 \text{мм}$ ; відстань між поділками шкали біля значення вимірюваного опору  $l_x = 5 \text{мм}$ ; різниця відліків за цими поділками  $R_x = 0,05 \text{кОм}$ . Обчислити абсолютну похибку вимірювання.

*Розв'язання*

Чутливість у точці відліку

$$S_x = l_x / R_x = 5 / 0,05 = 100 \text{мм/кОм}$$

Абсолютна похибка вимірювання

$$\Delta_R = \frac{kL}{100S_x} = \frac{1,5 \cdot 100}{100 \cdot 100} = 0,015 \text{кОм}$$

### ПРИКЛАД 2.25.

Лічильник газу має клас точності  $\textcircled{1,5}$  Обчислити абсолютну похибку вимірювання витрати газу протягом відліку  $8,6584 \text{ м}^3/\text{год}$ .

*Розв'язання*

Відносна похибка визначення витрати газу дорівнює:

$$k = \delta = \frac{\Delta_x}{x} \cdot 100,$$

де,  $x$  – вимірювальна витрата газу.

Тому абсолютна похибка вимірювання витрати газу протягом відліку  $8,6584 \text{ м}^3/\text{год}$  складає:

$$\Delta = \pm \frac{\delta \cdot x}{100} = \pm \frac{1,5 \cdot 8,6584}{100} = \pm 0,1299 \approx 0,13 \text{ м}^3/\text{год}.$$

### ПРИКЛАД 2.26.

Цифровий вольтметр класу точності  $0,02/0,01$  вимірює напругу  $U_v \approx 75 \text{ В}$  на межі  $U_k = 99,99 \text{ В}$ . Обчислити абсолютну похибку вимірювання.

*Розв'язання*

Межа допустимої відносної похибки

$$\delta_x = [0,02 + 0,01(99,99/75 - 1)]\% = 0,023332\%$$

Абсолютна похибка вимірювання:

$$\Delta_x = \frac{0,023332 \cdot 75}{100} = 0,017499 \text{ В} \approx 0,02 \text{ В}$$

### 3. ПОПЕРЕДНЯ ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

**Мета:** навчити студента виявляти й усувати систематичні складові похибок результатів вимірювань, обчислювати найвірогідніше значення вимірюваної фізичної величини та оцінювати його точність.

Усувати систематичні похибки можна введенням **поправок**  $\nabla$ , які чисельно дорівнюють значенню абсолютної систематичної похибки  $\Delta_x$ , але протилежні їй за знаком:

$$\nabla = -\Delta_x$$

Отже, **поправка** — це значення величини, що алгебраїчно додається до результату вимірювання для видалення систематичної похибки.

#### 3.1. Усунення інструментальної систематичної похибки.

**Усувати інструментальну похибку можна перевіркою** робочого засобу вимірювань у всьому діапазоні вимірювань за допомогою зразкового, що має вищу точність.

Значення абсолютних похибок  $\Delta_x$  вимірювального приладу обчислюють за формулою:

$$\Delta_x = x - x_0$$

де  $x$  — показ приладу, що перевіряється;  $x_0$  — дійсне значення вимірюваної величини, встановлене за допомогою зразкового вимірювального приладу.

#### 3.2. Усунення методичної систематичної похибки.

**Методичну систематичну похибку можна виявити, проаналізувавши умови проведення досліду і шляхом використання більш точної залежності** між розшукуваною величиною та величинами, які підлягають прямим вимірюванням, після чого внести відповідні поправки.

#### 3.3. Експериментальне виключення систематичної похибки.

**Метод заміщення** полягає у тому, що розшукувана фізична величина та вихідна величина регульованої міри діють на відповідний вимірювальний засіб по чергові, доки не буде досягнуте повне зрівноваження.

**Метод рандомізації** (англ. — перемішування, створення хаосу). Іноді похибки, систематичні в одній ситуації, є випадковими в іншій. Наприклад, інструментальна похибка конкретного екземпляра приладу є систематичною. В разі характеристики точності виготовлення партії таких приладів ця сама похибка є випадковою.

#### 3.4. Виправлені результати вимірювань.

Результати вимірювань, з яких виключено згадані систематичні похибки називаються **виправленими**.

В разі, **коли методична систематична похибка вимірювання не усунута її необхідно врахувати** в результаті вимірювання.

**Для прямих вимірювань** інструментальна систематична похибка, що залежить від неточності аналогового вимірювального приладу, обчислюється за формулою:

$$\theta = k \cdot N / 100$$

Величина  $\theta$  називається **надійною межею невиключених залишків систематичних похибок**.

**Для непрямих вимірювань** похибка, яка обумовлена інструментальними систематичними похибками засобів вимірювання факторів впливу, визначається, як



середньоквадратичне значення частинних систематичних похибок:

$$\Delta\theta_y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \theta_i \right|^2}$$

де  $\theta_i$  - невиключені залишки систематичної похибки вимірювання  $i$ -го фактору впливу;

$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\theta_i$  - частинна невиключена систематична похибка результату непрямого вимірювання  $i$ -го фактора впливу.

Середнє квадратичне відхилення результату непрямого вимірювання:

$$\sigma_y = \pm \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]^2 \cdot \sigma_{x_3}^2 \dots \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \pm \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

де  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma(x_i)$  - частинне середнє квадратичне відхилення результату непрямого вимірювання розшукуваної величини від прямого вимірювання  $i$ -го фактору впливу.

### 3.5. Приклади задач.

#### Приклад 3.1

Вольтметр, що перевіряється, має клас точності  $k_x = 2,5$  і шкалу, відградувану в діапазоні  $0 \dots 50$  В, а зразковий вольтметр - клас точності  $k_{zp} = 0,5$  і шкалу  $0 \dots 150$  поділок для вимірювань у діапазоні від  $0$  до  $60$  В. Результати перевірки приведені в таблиці 3.1:

Табл. 3.1.

Результати перевірки вольтметра.

Покази вольтметра що перевіряється $U_x$ , В	Покази зразкового вольтметра $\alpha_{zp}$ , В
10	23,0
20	47,0
30	72,5
40	98,5
50	122,5
40	102,5
30	77,5
20	50,5
10	27,5

Визначити, чи відповідає прилад, що перевіряється, своєму класові точності?

#### Розв'язання

Ціну поділки  $C_{zp}$ , В/под., зразкового приладу можна визначити за формулою

$$C_{зр} = \frac{U_{Nзр}}{\alpha_{Nзр}}$$

де  $U_{Nзр}$  — нормоване значення вольтметра;  $\alpha_{Nзр}$  — повна кількість поділок його шкали.

Обчислюємо:

$$C_{зр} = \frac{60}{150} = 0,5 \text{ (В / под.)}$$

Визначаємо покази зразкового вольтметра  $U_{зр}$ , В за формулою:

$$U_{зр} = \alpha_{зр} \cdot C_{зр}$$

а також абсолютну похибку  $\Delta x$ , В, для приладу, що перевіряється:

$$\Delta x = U_x - U_{зр}$$

Добуті значення зводимо в таблицю 3.2.

Табл. 3.2.

#### Результати визначення похибки вольтметра.

$U_x$ , В	$U_{зр}$ , В	$\Delta x$ , В
10	9,2	+0,8
20	18,8	+1,2
30	29,0	+1,0
40	39,4	+0,6
50	49,0	+1,0
40	41,0	-1,0
30	31,0	-1,0
20	20,2	-0,2
10	11,0	-1,0

Граничне значення основної абсолютної похибки приладу, що перевіряється, не має перевищувати:

$$\Delta_{x \max} = \frac{k_x \cdot N_x}{100} = \frac{2,5 \cdot 50}{100} = 1,25(B)$$

Оскільки фактичні значення  $\Delta x$  по всій шкалі не перевищують  $\Delta_{x \max}$  можна зробити висновок, що прилад, який перевіряється, відповідає своєму класові точності.

Складаємо таблицю 3.3. поправок  $\nabla$  для приладу, що перевірявся.

Табл. 3.3.

#### Значення поправок для вольтметра.

$U_x$ , В	$\nabla$ , В
10	-0,8
20	-1,2
30	-1,0
40	-0,6
50	-1,0

40	+1,0
30	+1,0
20	+0,2
10	+1,0

### Приклад 3.2

Опір резистора  $R$  вимірюється за допомогою амперметра й вольтметра, покази яких такі:  $U_V = 40 \text{ В}$ ;  $I_A = 50 \text{ мА}$ . Внутрішні опори приладів:  $r_V = 45 \text{ кОм}$ ;  $r_A = 4,8 \text{ Ом}$ . Ввести поправки до показів приладів.

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.1.

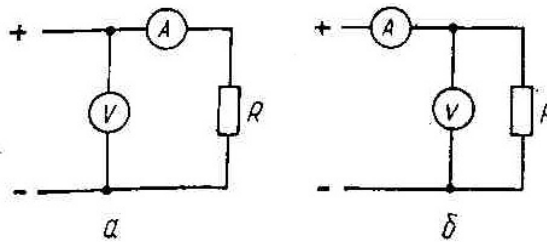


Рис. 3.1. Розрахункові схеми вимірювання опору резистора: схема а); схема б).

Для схеми рис. 1, а поправка до показу вольтметра складає:

$$\nabla_V = -I_A \cdot r_A = -0,5 \cdot 4,8 = -0,24 \text{ (В)}.$$

Для схеми рис. 1, б поправка до показу амперметра складає:

$$\nabla_A = -U_V / r_V = -40 / 45000 = -0,0009 \text{ А} = -0,9 \text{ мА}.$$

### Приклад 3.3.

Ввести поправку до результату вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = 2200 \text{ Н}$ ,  $S_2 = 600 \text{ Н}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , діаметр барабана  $0,22 \text{ м}$ , швидкість руху стрічки  $v = 1 \text{ м/с}$ , погона маса стрічки  $q = 7,6 \text{ кг/м}$ , товщини стрічки  $h = 1,0 \text{ см}$ , радіус барабана  $r = 0,11 \text{ м}$ .

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2.

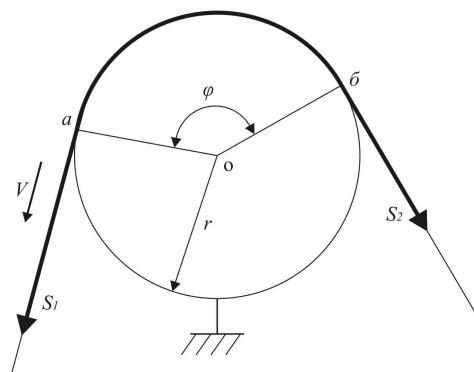


Рис. 3.2. Розрахункова схема:  $S_1$ ,  $S_2$  – більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла (натягування в збігаючій й набігаючій на блок гілках гнучкого тіла) при

ковзанні;  $r$  - радіус блоку;  $\varphi$  - кут обхвату блоку гнучким тілом;  $v$  - напрямок руху.

Силу тертя між стрічкою та барабаном у відповідності з законом тертя гнучких тіл Ейлера визначають за формулою:

$$F = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ Н}$$

де  $F$  – сила тертя між стрічкою та барабаном;  $S_1, S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки.

Але закон тертя гнучких тіл Ейлера справедливий для ідеальної нитки, для якої товщина дорівнює нулю. Тому виникає методична складова систематичної похибки від неврахування товщини стрічки, див. рис. 3.3.

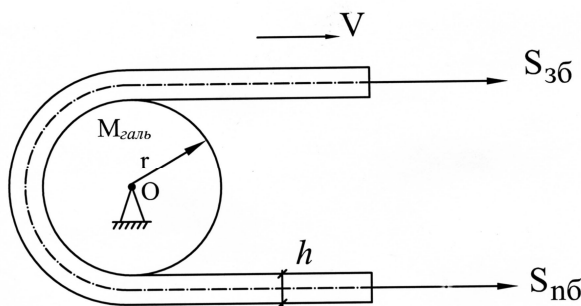


Рис. 3.3. Розрахункова схема взаємодії конвеєрної стрічки та барабана:  $S_1, S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки;  $r$  - радіус барабана;  $v$  - швидкість руху стрічки;  $h$  - товщина гнучкого тіла.

В нашому випадку рівняння рівноваги моментів сил має такий вигляд:

$$\sum M_o = S_1 \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - S_{2б} \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - M_{галь} = 0$$

де,  $r$  – радіус барабана;  $t$  – товщина стрічки.

Або:

$$(S_1 - S_2) \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) = F_{\partial} \cdot r ;$$

Звідки дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = \left(r + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \cdot (S_1 - S_2) = \left(1 + \frac{t}{2r}\right) \cdot (S_1 - S_2) = 0,045 \cdot (2200 - 600) = 1670 \text{ Н}$$

Методична складова систематичної похибки складає:

$$\Delta_F = F - F_{\partial} = -\frac{t}{2r} \cdot (S_1 - S_2) = -\frac{0,01}{0,22} \cdot (2200 - 600) \cong -0,045 \cdot 160 \cong -72 \text{ Н}$$

$$\Delta_{F, \%} = \frac{\Delta_F}{F_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{72}{1670} \cdot 100\% \cong -4,5\%.$$

Тому поправка до результату вимірювання параметра складає:

$$\nabla = -\Delta_F = 72 \text{ Н}$$

#### Приклад 3.4

Ввести поправку до результату непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=2200 \text{ Н}$ ,  $S_2=600 \text{ Н}$ , кут обхвату стрічкою барабана

$\varphi$  складає  $180^\circ$ .

### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2.

Згідно з доведеннями Ейлера коефіцієнт тертя між гнучким тілом (невагомої, нерозтяжною й абсолютно гнучкою ниткою) та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200}{600} = \frac{1,22}{3,14} = 0,41.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера коефіцієнт тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396H$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600H$$

Тоді коефіцієнт тертя складає:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_\mu = \mu - \mu_\partial = 0,41 - 0,36 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{\mu_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{0,05}{0,36} \cdot 100\% \cong -14,0\%.$$

Поправка до результату непрямого вимірювання коефіцієнта тертя складає:

$$\nabla = -\Delta_\mu = -0,05$$

### Приклад 3.5

Ввести поправку до непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кг,  $S_2=60$  кг, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погана маса стрічки  $q = 7,6$  кг.

### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. Згідно з доведеннями Ейлера (та впливом відцентрових сил стрічки) коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо вимірюванням за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1 - q \cdot v^2}{S_2 - q \cdot v^2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200 - 7,6 \cdot 1^2}{600 - 7,6 \cdot 1^2} = 0,42.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера визначається з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,314 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ кГ}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{\mu} = \mu - \mu_{\partial} = 0,42 - 0,37 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu}, \% = \frac{\Delta_{\text{сист.м.}}}{\mu_{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{0,05}{0,37} \cdot 100\% \cong 13,5\%.$$

Тому поправка до результату вимірювання значення параметра:

$$\nabla = -\Delta_{\mu} = -0,05$$

### Приклад 3.6.

*Ввести поправку до результату непрямого вимірювання сили тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^{\circ}$ .*

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. Згідно з доведеннями Ейлера розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться за формулою:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu\varphi} - 1).$$

По новому розв'язанню задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 0,314 \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ Н}$$

Тоді:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4396} = 0,36..$$

Тому:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu\varphi} - 1) = 600(2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 1258 \text{ Н}$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_\partial = 1258 - 1600 = -332 \text{ Н}$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_E}{F_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{332}{1600} \cdot 100\% \cong -21\%.$$

Поправка до результату вимірювання параметра:

$$\nabla = -\Delta_F = 332 \text{ Н}$$

### Приклад 3.7

*Ввести поправку до результату непрямого вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v - 1$  м/с, погона маса стрічки  $q - 7,6$  кг.*

#### Розв'язання

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо вимірюванням за формулою:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu\varphi} - 1).$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial}.$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, знаходиться з виразу:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu\varphi} - 1) = (600 - 7,6 \cdot 1,0^2) \cdot (2,71^{0,373 \cdot 3,14} - 1) = 1300 \text{ Н}.$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_\partial = 1300 - 1600 = -300 \text{ Н};$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_F}{F_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{300}{1600} \cdot 100\% \cong -18,8\%.$$

Тому поправка до результату вимірювання параметра:

$$\nabla = -\Delta_F = 300 \text{ Н}.$$

### Приклад 3.8

Ввести поправку до результату непрямого вимірювання нормальної реакції між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .

#### Розв'язання

В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряду залежать фрикційні властивості.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами знаходиться непрямо з виразу:

$$N = \int_0^\varphi S(\alpha) d\alpha = \int_0^\varphi S_2 \cdot e^{\mu \cdot \varphi} d\alpha = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu \varphi} - 1)$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_\partial}{N_\partial}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Звідси нормальна реакція між тілами за доведеннями Ейлера складає:

$$N = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu \varphi} - 1) = \frac{600}{0,36} (2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 3495 \text{ Н}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_\partial = 3495 - 4396 = -901 \text{ Н};$$

$$\Delta_N, \% = \frac{\Delta_N}{N_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{901}{4396} \cdot 100\% \cong -20,5\%.$$

Поправка до результату непрямого вимірювання параметра складає:

$$\nabla = -\Delta_N = 901 \text{ Н}.$$

#### Приклад 3.9

Ввести поправку до результату непрямого вимірювання нормальної реакції між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погона маса стрічки  $q = 7,6$  кг.

#### Розв'язання



В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряму залежать фрикційні властивості.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами з врахуванням відцентрових сил знаходиться з виразу:

$$N = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1).$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}}.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера нормальна реакція між тілами складає:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}.$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Звідки нормальна реакція між тілами за рівнянням Ейлера складає:

$$N = \int_0^{\varphi} S(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) = \frac{600 - 7,6 \cdot 1,0^2}{0,37} \cdot (2,71^{0,37 \cdot 3,14} - 1) = 3513 \text{ Н}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_{\partial} = 3513 - 4372 = 858 \text{ Н};$$

$$\Delta_N, \% = \frac{\Delta_N}{N_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{858}{4372} \cdot 100\% \cong -19,6\%.$$

Тому поправка до результату визначення параметра:

$$\nabla = -\Delta_N = 858 \text{ Н}.$$

### Приклад 3.10.

*Ввести поправку до результату непрямого вимірювання зусилля натягування нитки на середині контакту  $S(\alpha)$  при ковзанні по барабану на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ .*

*Розв'язання*

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. Згідно з виведеннями Ейлера, натягування гнучкого тіла по лінії контакту з барабаном визначається функцією:

$$S(\alpha) = S_2 e^{\mu \cdot \alpha}$$

де  $S(\alpha)$  – зусилля натягування гнучкого тіла в заданому перетині гнучкого тіла;  $\varphi$  – кут обхвату барабана гнучким тілом;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя

знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\delta} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\delta} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, натягування гнучкого тіла по середній лінії контакту при терті по блоку за рівнянням Ейлера складає:

$$S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = S_2 \cdot e^{\mu \cdot \varphi / 2} = 600 \cdot 2,71^{0,36 \cdot 1,57} = 1050 \text{ Н}$$

Дійсне натягування гнучкого тіла за новим рівнянням тертя гнучких тіл 2007 р. складає:

$$S(\alpha)_{\delta} /_{a=\frac{\varphi}{2}} = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 = 1400 \text{ Н}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла на середині контакту з блоком складає:

$$\Delta_S = S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} - S(a)_{\delta} /_{a=\frac{\varphi}{2}} = 1050 - 1400 = -350 \text{ Н};$$

$$\Delta_{S, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}}} \cdot 100\% \cong -\frac{350}{1400} \cdot 100\% \cong -25\%.$$

Поправка до результату непрямого вимірювання параметра:

$$\nabla = -\Delta_S = 350 \text{ Н}$$

### Приклад 3.11.

*Ввести поправку до результату непрямого вимірювання зусилля натягування гнучкого тіла  $S(a)$  по середині лінії контакту з барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=220$  кГ,  $S_2=60$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $180^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v - 1$  м/с, погона маса стрічки  $q - 7,6$  кг.*

*Розв'язання.*

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.2. В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункове зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном складає:

$$S(a) = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\mu a} + q \cdot v^2.$$

де  $S(a)$  – зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном;  $q$  – лінійна маса гнучкого тіла;  $a$  – кут перетину гнучкого тіла;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя

знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами по новому розв'язанню задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, визначається виразом:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

А коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, натягування гнучкого тіла за рівнянням тертя Ейлера складає:

$$S(a) / \left. \frac{a=\varphi}{2} \right| = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\frac{\mu \cdot \varphi}{2}} + q \cdot v^2 = (600 - 7,6 \cdot 1,0^2) \cdot 2,71^{0,371 \cdot 57} + 7,6 \cdot 1,0^2 = 1066 \text{ Н}.$$

Але дійсне натягування гнучкого тіла за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2 + qv^2.$$

Звідки дійсне розшукуване натягування гнучкого тіла складає:

$$S(\alpha)_{\partial} / \left. \frac{a=\varphi}{2} \right| = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 + qv^2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 + 8 = 1416 \text{ Н}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла складає:

$$\Delta_s = S(a) / \left. \frac{a=\varphi}{2} \right| - S(\alpha)_{\partial} / \left. \frac{a=\varphi}{2} \right| = 1066 - 1416 = -336 \text{ Н};$$

$$\Delta_s, \% = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(a) / \left. \frac{a=\varphi}{2} \right|} \cdot 100\% \cong -\frac{336}{1416} \cdot 100\% \cong -23,7\%.$$

Тому поправка до результату непрямого вимірювання параметра:

$$\nabla = -\Delta_s = 336 \text{ Н}$$

### Приклад 3.12

*Ввести поправку до результату непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзду з масою електровозу  $m_e = 5 \text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_b = 3,1 \text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складу складає  $8 \text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9 \text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску  $i = 10\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30 \text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = 8 \text{ км/год}$ .*

#### Розв'язання

На рис. 3.4. представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

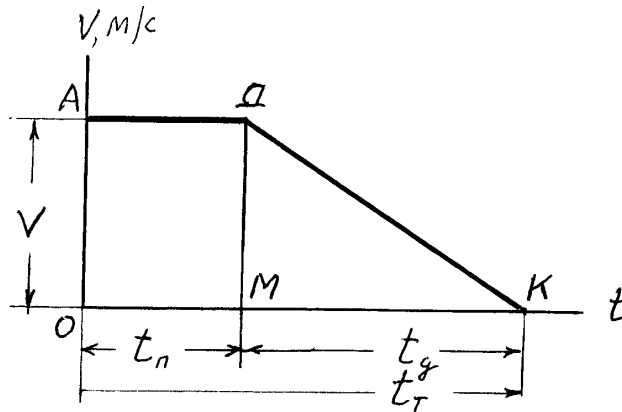


Рис. 3.4. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_d$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $V_n$  - швидкість поїзда в момент прикладення гальмівної сили  $B$ .

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзду, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює 3,4 сек);  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзду в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзду при гальмуванні.

Прискорення руху поїзду визначається з рівняння руху поїзду при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8-10 + \frac{9000}{(5+5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,39 \text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху составу.

Звідки:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 - 6,33 = 1,23 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} - (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 - 23,40} + 1,33, \text{ м/с}^2.$$

Тому рівняння не мають розв'язанн.

Якщо керуватись допущенням діючої методики - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 6,33 = 13,89 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} + (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 + 23,40} - 1,33 = 5,02 - 1,33 = 3,69, \text{ м/с}^2.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзду в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху поїзду в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений,

що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 3.5.

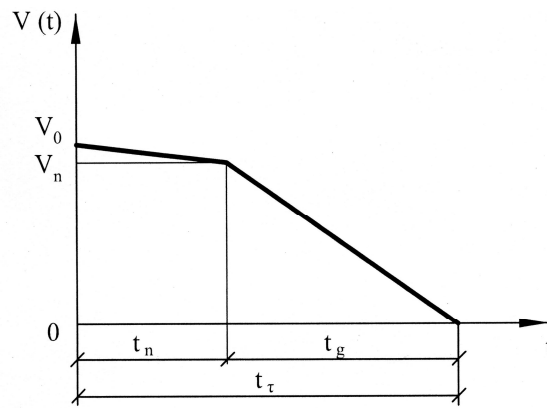


Рис. 3.5. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_d$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $V_n$  - швидкість поїзда в момент прикладення гальмівної сили  $B$ .

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} \text{ м.}$$

$$V_{\text{дон}}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)};$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії знаходиться з рівняння руху поїзда в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 10}{110} = +0,02 \text{ м/с}^2.$$

Тому:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,02 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,02 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 0,12 + 6,71 = 14,39 \text{ м.}$$

$$V_{\text{дон}}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 +$$

$$+ \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30 + 0,02 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 2340 - 0,09} = -1,36 + 5,01 = 3,65 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзду, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні, складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Тому, методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою складає:

$$\Delta_{\text{сущ. l}} = l_m - l_m^{\partial} = 13,89 - 14,39 = -0,50 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сущ. l, \%}} = \frac{\Delta_{\text{сущ. l}}}{l_m^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{-0,5}{14,39} \cdot 100\% \cong -3,47\%.$$

$$\Delta_{\text{сущ. v}} = V_{\text{дон}} - V_{\text{дон}}^{\partial} = 3,69 - 3,65 = 0,04 \text{ м/с}$$

$$\Delta_{\text{сущ. v, \%}} = \frac{\Delta_{\text{сущ. v}}}{V_{\text{дон}}^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{0,04}{3,65} \cdot 100\% \cong 1,10\%.$$

Тому поправка до результату непрямого вимірювання параметрів руху поїзда:

$$\nabla = -\Delta_l = 0,50 \text{ м};$$

$$\nabla = -\Delta_v = -0,4 \text{ м/с}$$

### Приклад 3.13.

Ввести поправку до результату непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзду з масою електровозу  $m_e = 5 \text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_v = 3,1 \text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складу складає  $8 \text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9 \text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску  $i = 45\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30 \text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = 8 \text{ км/год}$ .

#### Розв'язання

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання.

На рис. 3.4. представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзду, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює  $3,4 \text{ сек}$ );  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзду в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзду при гальмуванні.

Прискорення руху поїзда знаходиться з рівняння руху поїзду при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8 - 45 + \frac{9000}{(5 + 5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,072 \text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху складу.

Тому:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 - 34,29 = -26,73 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} - (-0,072) \cdot 3,4 = \sqrt{0,06 - 4,32} + 0,088, \text{ м/с}^2.$$

Тобто рівняння не має розв'язання.

Якщо керуватись допущенням в діючій методиці - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 34,29 = 41,85 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} + (-0,072) \cdot 3,4 =$$

$$= \sqrt{0,06 + 4,32} - 0,24 = 2,09 - 0,24 = 1,85 \text{ м/с}.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзду в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху

поїзду в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений, що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 3.5.:

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^\partial = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a}$$

$$; V_{\partial on}^\partial = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)}$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії визначається з рівняння руху поїзда в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 45}{110} = +0,33 \text{ м/с}^2.$$

Звідси:

$$l_m^\partial = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,33 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,33 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 1,91 + 77,56 = 87,03 \text{ м.}$$

$$V_{\partial on}^\partial = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 +$$

$$+ \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30 + 0,33 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 4,32 - 1,52} = -1,36 + 2,15 - 1,42 = 0,79 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзда, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні, складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою, складає:

$$\Delta_{\text{сис.}l} = l_m - l_m^\partial = 41,85 - 87,03 = -45,18 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сис.}l, \%} = \frac{\Delta_{\text{сис.}l}}{l_m^\partial} \cdot 100\% \cong \frac{-45,18}{87,03} \cdot 100\% \cong -52\%.$$

$$\Delta_{\text{сис.}v} = V_{\partial on} - V_{\partial on}^\partial = 1,85 - 0,79 = 1,06 \text{ , м/с}$$

$$\Delta_{\text{сис.}v, \%} = \frac{\Delta_{\text{сис.}v}}{V_{\partial on}^\partial} \cdot 100\% \cong \frac{1,06}{0,79} \cdot 100\% \cong 134\%.$$

Тому поправка до результату непрямого вимірювання параметрів:

$$\nabla_l = -\Delta_l = 45,18 \text{ м ;}$$

$$\nabla_v = -\Delta_v = -1,06 \text{ , м/с}$$

### ПРИКЛАД 3.14.

В електричній схемі рис. 2.5. опори  $R_1 = 5 \text{ кОм}$ ,  $R_2 = 10 \text{ кОм}$ . Опір вольтметра  $r_v = 50 \text{ кОм}$ . Уразі підмикання вольтметра до точок В і С його показ  $U_v = 75 \text{ В}$ . Визначити систематичну похибку вимірювання напруги, спричинену власним споживанням приладу.

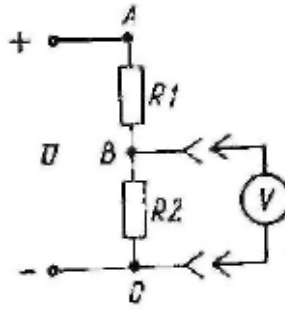


Рис. 3.6. Електрична схема з єднання елементів.

*Розв'язання*

Якщо підімкнено вольтметр, то спад напруги на  $R_2$ :

$$U_V = \frac{U}{R_1 + \frac{R_2 \cdot r_V}{R_2 + r_V}} \cdot \frac{R_2 \cdot r_V}{R_2 + r_V} = \frac{U}{5000 + \frac{10000 \cdot 50000}{10000 + 50000}} \cdot \frac{10000 \cdot 50000}{10000 + 50000} = 0,625 U.$$

Оскільки  $U_V = 75$  В, то:

$$U = 75 / 0,625 = 120 \text{ В.}$$

Тоді, якщо вольтметр відімкнено:

$$U_{BC} = \frac{U}{R_1 + R_2} \cdot R_2 = \frac{120}{5000 + 10000} \cdot 10000 = 80 \text{ В.}$$

Систематична похибка вимірювання складає:

$$\Delta_s = U_V - U_{BC} = 75 - 80 = -5 \text{ В.}$$

Тому поправка до результату вимірювання складає:

$$\nabla = +5 \text{ В.}$$



## 4. ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

**Мета:** навчити студента обробляти результати лабораторних та виробничих вимірювань.

### 3.1. Загальні відомості.

Встановлено, що похибка вимірювань підпорядковується нормальному закону розподілу випадкових величин (закону Гаусса), рис. 1.

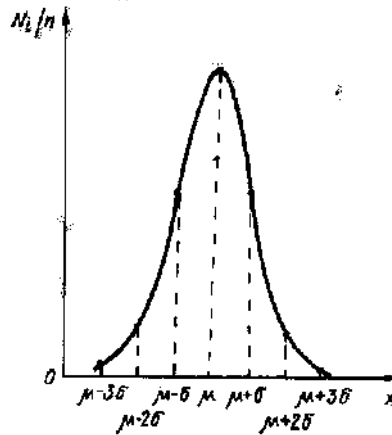


Рис. 1. Нормальний закон розподілу випадкових величин

Аналітична форма нормального закону розподілу випадкових величин  $x$ :

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

де  $\mu$  — математичне сподівання випадкової величини (центр групування її значень; можна вважати, що  $\mu$  збігається з істинним значенням величини  $X$ );  $\sigma^2$  — дисперсія випадкової величини (розсіяння значень випадкової величини відносно центра групування);  $e$  — основа натуральних логарифмів.

Значення  $\mu$  та  $\sigma$  можна виразити через  $x_i$

$$\mu(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

$$\sigma(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (3)$$

У вибірках зі скінченним  $n$  точне обчислення  $\mu$  та  $\sigma$  неможливе; замість них приблизно обчислюють їхні статистичні оцінки  $\bar{\mu}$  та  $\bar{\sigma}$ .

Для вибірки з  $n$  значень  $x_i$  оцінкою математичного сподівання випадкової величини (її найвірогіднішим значенням) є

$$\bar{\mu}(X) \approx \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

Вибіркове середньоквадратичне відхилення окремих результатів спостережень для цієї самої вибірки можна обчислити за формулою, яку запропонував німецький математик Фрідріх Вільгельм Бессель:

$$\bar{\sigma}(X) \approx s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (5)$$

де  $x_i - \bar{x}$  — випадкове відхилення  $i$ -го результату спостереження від знайденого значення  $\bar{x}$ .

Оцінка  $\bar{x}$  математичного сподівання випадкової величини дещо відрізняється від  $\mu$ . Якщо закон розподілу похибок нормальний, то можна вважати, що відхилення  $\bar{x}$  від  $\mu$  не перевищує:

$$S_{\bar{x}} = s / \sqrt{n} \quad (6)$$

де  $S_{\bar{x}}$  — середньоквадратичне відхилення значення  $\bar{x}$  (від математичного сподівання  $\mu$ ).

Надійні межі, в яких при заданій імовірності перебуває величина  $X$ , обчислюються за формулами:

$$\bar{x} - t_Y S_{\bar{x}} \quad (\text{для нижньої межі});$$

$$\bar{x} + t_Y S_{\bar{x}} \quad (\text{для верхньої});$$

де  $t_Y$  — коефіцієнт надійності для ймовірності  $P$ .

Для невеликих вибірок ( $n < 30$ ) надійні межі залежать також і від кількості спостережень  $n$  (це уточнення запропонував англійський математик Уільям Госсет, відомий під псевдонімом Стьюдент).

У технічних вимірюваннях (як лабораторних, так і виробничих) обчислення виконуються з довірчою імовірністю  $P = 95\%$ ; в окремих випадках, коли експеримент неможливо повторити, приймають  $P = 99\%$ . Тільки в особливо важливих випадках, якщо результати експерименту впливають на життя й здоров'я людей, слід брати  $P = 99,9\%$ .

### 3.2. Перевірка статистичного розподілу випадкової величини.

#### Для прямих вимірювань.

Оскільки методи обробки результатів вимірювань ґрунтуються на використанні нормального закону розподілу випадкових величин, перед початком обчислення **бажано переконатися** у тому, що дана сукупність відповідає згаданому закону.

Для порівняно невеликих сукупностей цю перевірку можна здійснити **графоаналітичним методом**. Для даної вибірки за певними правилами слід побудувати графік емпіричного розподілу випадкових величин, і якщо точки цього графіка розташуються приблизно на прямій лінії, то дана сукупність відповідає нормальному закону розподілу. Цей метод придатний для вибірок за кількості спостережень  $3 < n < 40$ .

Застосовуючи графоаналітичний метод аналізу, слід передусім упорядкувати вибірку, розмістивши значення  $x_i$  в порядку зростання:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Якщо деякі значення в такому варіаційному ряду повторюються, то в робочу таблицю їх записують тільки один раз, але вказують кількість цих значень (частота  $m_j$  даної варіанти  $x_j$  ряду).

В наступній графі записують наростаючим підсумком так звані накопичені частоти  $M_j$  (сумарна кількість значень  $m_j$  від початку до  $x_j$  включно), після чого обчислюють інтеграл Лапласа:

$$\Phi(z_j) = \frac{M_j}{n+1} - 0.5$$

За таблицею значень інтегралу Лапласа слід установити значення  $z_j$ , а потім

побудувати графік  $z_j = f(x_j)$ . Якщо графік цієї функції приблизно прямолінійний, то можна вважати, що дана вибірка не суперечить нормальному законові розподілу випадкових величин.

**Обробку результатів багаторазових спостережень** за прямого вимірювання слід здійснювати відповідно до розглянутих методів:

- якщо потрібно — виконати попередню обробку вибірки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (відкинути або якомога зменшити систематичні похибки), а також перевірити, чи відповідає вибірка нормальному законові розподілу; відкинути промахи;
- обчислити надійні межі невиключених залишків систематичної складової похибки  $\theta$ ; у найпростішому випадку визначити граничні значення основної похибки, вважаючи, що  $\Delta x = \theta$ ;
- обчислити найімовірніше (найвірогідніше) значення результату вимірювання - вибіркоче середньоарифметичне:

$$A = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- обчислити вибіркоче середньоквадратичне відхилення значення  $x$  від істинного значення фізичної величини за формулою:

$$S_x^- = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

- обчислити надійну межу випадкової похибки результату вимірювання за формулою:

$$\mathcal{E} = t_Y \cdot S_x^-$$

Значення коефіцієнта надійності  $t_Y$  для ймовірностей 0,95 та 0,99 наведено в дод. 5 [1];

- обчислюючи надійну межу загальної похибки  $\Delta A$  результату, треба врахувати як  $\mathcal{E}$ , так і  $\theta$ ; для цього спочатку слід обчислити допоміжний параметр  $\theta / S_x^-$ , причому:

- якщо  $\theta / S_x^- < 0,8$ , то величиною  $\theta$  можна знехтувати, і вважати, що:

$$\Delta A \approx \mathcal{E}$$

- якщо  $\theta / S_x^- > 8$ , то можна знехтувати величиною  $\mathcal{E}$ , вважаючи, що:

$$\Delta A \approx \theta$$

- якщо  $0,8 \leq \theta / S_x^- \leq 8$ , то

$$\Delta A \approx K S_\Sigma$$

$$K = \frac{\mathcal{E} + \theta}{S_x^- + \frac{\theta}{\sqrt{3}}}$$

$$S_\Sigma = \sqrt{S_x^{-2} + \left(\frac{\theta}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Результат вимірювання записати так:

$$X = A \pm \Delta A \text{ (при } P=0,95\text{),}$$

де  $A$  — найвірогідніше (дійсне) значення результату вимірювання;  $\Delta A$  — надійна межа загальної похибки результату вимірювання.

- остаточне значення  $\Delta A$  виразити числом, що містить не більш як дві значущі

цифри. Як правило, в  $\Delta A$  залишають одну значущу цифру; другу цифру можна залишати тоді, коли перша цифра менша за 3; при цьому другу значущу цифру доцільно округлити до 0 або 5. Дві значущі цифри залишають також у разі важливих і особливо точних вимірювань і якщо з результатами вимірювання виконуватимуться подальші розрахунки.

Числове значення  $A$  має закінчуватися десятковим знаком того самого розряду, яким закінчується  $\Delta A$ . Правила округлення чисел звичайні.

У виробничих умовах здебільшого проводять одноразові прямі вимірювання. При цьому робити висновок про точність результатів можна лише на підставі нормованих метрологічних характеристик засобів вимірювань. Для вимірювальних приладів з такою метрологічною характеристикою є граничне значення допустимої основної похибки.

Обробку результатів одноразових прямих вимірювань слід здійснювати в такій послідовності:

- відкинути (або якомога зменшити) систематичну похибку;
- обчислити надійну межу похибки результату  $\Delta A$ ;
- записати результат вимірювання  $A$ , округливши його числове значення відповідно до значення надійної межі похибки  $\Delta A$  (при цьому значення  $\Delta A$ , як правило, не вказують).

**Для непрямих вимірювань** вимірювальна величина  $y$ , визначається на підставі прямих вимірювань ряду величин  $x_1, x_2, x_3 \dots x_k$ , причому функціональний зв'язок (рівняння зв'язку)  $y = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_k)$  уже відомий.

**Обробку результатів багаторазових спостережень** кожної з ряду величин (факторів) при непрямому вимірюванні слід здійснювати відповідно до розглянутих методів.

Якщо вимірювання існуючих факторів впливу здійснено у відповідності до розглянутого методу прямого вимірювання, то для визначення невиключеного сумарного залишку систематичної похибки непрямого вимірювання використовують формулу:

$$\Delta y = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \theta_i \right|^2}.$$

де  $\theta_i$  - невиключені залишки систематичної похибки вимірювання  $i$ -го фактору впливу;

$\left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \theta_i$  - частинна невиключена систематична похибка результату непрямого вимірювання  $i$ -го фактору впливу.

Середнє квадратичне відхилення результату непрямого вимірювання визначається, як:

$$\sigma_y = \pm \left( \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \right]^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^2 \cdot \sigma_{x_2}^2 + \left[ \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]^2 \cdot \sigma_{x_3}^2 \dots \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \pm \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

де  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma(x_i)$  - частинне середнє квадратичне відхилення результату непрямого вимірювання розшукуваної величини від прямого вимірювання  $i$ -го фактору впливу.

### 3.3. Приклади задач.

#### Приклад 3.1

Дано вибірку: 10,3; 10,1; 10,3; 10,2; 10,4; 10,2; 10,5; 10,3; 10,4. Перевірити, чи відповідає ця вибірка нормальному закону (закону Гаусса) розподілу випадкової

величини..

### Розв'язання

Обчислення статистичного розподілу результатів багаторазових вимірювань приведені в табл. 3.1.

Табл. 3.1.

Статистичний розподіл результатів багаторазових вимірювань.

$j$	$x_j$	$m_j$	$M_j$	$\Phi(z_j)$	$z_j$
1	10,1	1	1	-0,4	-1,28
2	10,2	2	3	-0,2	-0,52
3	10,3	3	6	+0,1	+0,25
4	10,4	2	8	+0,3	+0,84
5	10,5	1	9	+0,4	+1,28

На рис. 3.1. приведений графік  $z_j = f(x_j)$ , який близький до прямої лінії. Тому можна вважати, що ця вибірка не суперечить нормальному закону розподілу.

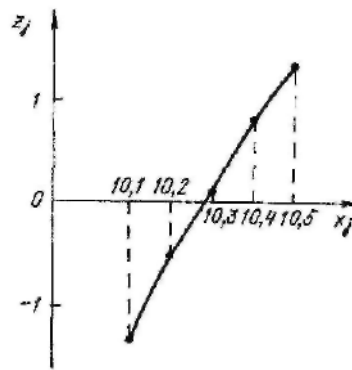


Рис. 3.1. Графік статистичного розподілення результатів вимірювання.

Задана статистична вибірка  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  відповідає нормальному закону розподілу випадкової величини.

Але можуть бути сумніви щодо нормальності певних результатів спостережень – графік помітно відрізняється від прямої лінії. Тоді використовують кількісний критерій оцінки аномальності результатів спостережень. Для цього треба обчислити середньоарифметичне значення  $\bar{x}$  для даної вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

а також середньоквадратичне відхилення окремих результатів спостережень:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Далі слід знайти показник аномальності:

$$V = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

Для прийнятої імовірності  $P=0,95$  при технічних цих вимірювань та даного значення

повторних вимірювань треба знайти значення параметра  $h$  з довідкових матеріалів.

Критерієм аномальності є умова  $|V| > h$ . Якщо це так, то результат  $x_k$  є промахом, і його слід вилучити з вибірки.

### Приклад 3.2

Дано вибірку: 10,3; 10,5; 10,4; 10,3; 11,0; 10,1; 10,4; 10,3; 10,2. Перевірити, чи відповідає ця вибірка нормальному закону розподілу.

Розв'язання:

Обчислення статистичного розподілу результатів багаторазових вимірювань приведені в табл. 3.3.

табл. 3.3.

Статистичний розподіл результатів багаторазових вимірювань.

$j$	$x_j$	$m_j$	$M_j$	$\Phi(z_j)$	$z_j$
1	10,1	1	1	-0,4	-1,28
2	10,2	1	2	-0,3	-0,84
3	10,3	3	5	0	0
4	10,4	2	7	+0,2	+0,52
5	10,5	1	8	+0,3	+0,84
6	11,0	1	9	+0,4	+1,28

Викликає сумніви п'ятий результат спостереження  $x_5=11,0$ . Спочатку перевіримо на нормальність вибірку в цілому, рис :

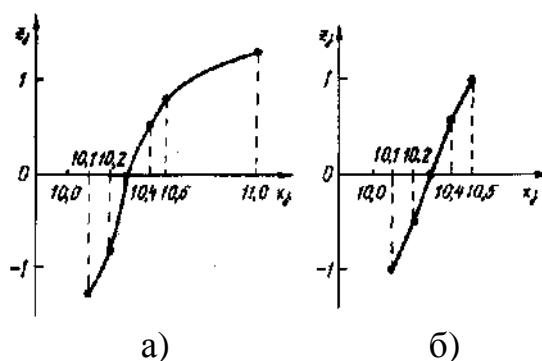


Рис. 3.2. Графік статистичного розподілення результатів вимірювання: а) вихідних даних; б) даних після вилучення промаху.

Вигляд графіка (рис. 3.2. а) спонукає до висновку, що вибірка не відповідає розподілу Гауса.

Тепер перевіримо на аномальність результат спостереження  $x_5=11,0$ .

Для вибірки:  $\bar{x} = 10,388\ 888$ ;  $s = 0,257\ 120\ 81$ . Обчислюємо:

$$V = \frac{11 - \bar{x}}{s} = 3,3767504$$

Для  $n = 9$  в довідкових матеріалах теорії вірогідності знаходимо значення  $h=2,11$ . Оскільки  $|V| > h$ , результат спостереження  $x_5=11,0$  є промахом, і його вилучаємо зі статичного ряду. У вибірці залишається 8 результатів: 10,3; 10,5; 10,4; 10,3; 10,1; 10,4;

10,3; 10,2. Знову перевіряємо її на відповідність нормальному законові розподілу. В табл. 3.3. приведені обчислення цього статистичного ряду.

табл. 3.2.

Статистичний розподіл результатів багаторазових вимірювань.

$j$	$x_j$	$m_j$	$M_j$	$\Phi(z_j)$	$z_j$
1	10,1	1	1	-0,39	-1,23
2	10,2	1	2	-0,28	-0,77
3	10,3	3	5	+0,06	+0,15
4	10,4	2	7	+0,28	+0,77
5	10,5	1	8	+0,39	+1,23

Будуємо графік  $z_j = f(x_j)$  і за його виглядом (рис. 3,2. б) переконуємося, що тепер ця вибірка не суперечить закону Гауса.

### Приклад 3.3.

Прямими вимірюваннями добуто три результату спостережень довжини:  $x_i = 309,3$  см; 297,4 см.; 290,6 см. Вважаючи, що систематичні похибки усунено, клас точності рулетки  $\pm 1$  мм. Визначити найвірогідніше значення результату вимірювання та оцінити його точність при довірчій вірогідності  $p = 0,95$ .

Розв'язання

Знаходимо результат вимірювання:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{309,3 + 297,4 + 290,6}{3} = 299,1 \text{ см}$$

Визначимо:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2} [(309,3 - \bar{x})^2 + (297,4 - \bar{x})^2 + (290,6 - \bar{x})^2]} = 5,05 \text{ см}$$

Значення:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,1}{5,05} = 0,02$$

Отже інструментальною похибкою приладу можна знехтувати

$$\Delta A = \varepsilon |_{p=0,95} \cong 5,05 \cdot t_n = 5,05 \cdot 4,3 = 21,72 \cong 20 \text{ см.}$$

Тому при  $p=0,95$

$$X = (300 \pm 20) \text{ см.}$$

### Приклад 3.4.

Прямими вимірюваннями добуто три результату спостережень сили взаємодії тіл:  $x_i = 9$  кГ; 11 кГ.; 10 кГ. Вважаючи, що систематичні похибки усунено, клас точності динамометра 1,0 діапазон вимірювання 0...100 кГ. Визначити найвірогідніше значення результату вимірювання та оцінити його точність при довірчій вірогідності  $p = 0,95$ .

Розв'язання

Граничне значення основної абсолютної похибки динамометра, що перевіряється, не має перевищувати:

$$\Delta_{zp \max} = \frac{k_{zp} \cdot N_{zp}}{100} = \frac{1,0 \cdot 100}{100} = 1,0 \text{ кГ}.$$

Результат вимірювання:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{9+10+11}{3} = 10 \text{ кГ}.$$

Визначимо:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2} [(9 - \bar{x})^2 + (10 - \bar{x})^2 + (11 - \bar{x})^2]} = 0,5773502 \text{ кГ}$$

Значення:

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{1,0}{0,5773502} = 1,9999999.$$

Отже випадкова похибка

$$\varepsilon |_{p=0,95} \cong 0,5773502 \cdot t_n = 0,5773502 \cdot 4,3 \cong 2,4826 \text{ кГ}.$$

Тому необхідно врахувати систематичну і випадкову похибку

$$\Delta A \cong \sqrt{\varepsilon^2 + \theta^2} = 2,6764 \text{ кГ} \cong 2,5 \text{ кГ}$$

При  $p=0,95$

$$X = (10,0 \pm 2,5) \text{ кГ}.$$

### Приклад 3.5.

Прямими вимірюваннями добуто три результати спостережень за напругою:  $x_1=10,1 \text{ В}$ ;  $x_2=10,2 \text{ В}$ ;  $x_3=10,1 \text{ В}$ . Вважати, що систематичні похибки усунено; вимірювальний прилад — вольтметр класу точності 1,0 з однібічною шкалою 0...30 В. Визначити найвірогідніше значення результату вимірювання та оцінити його точність при довірчій вірогідності  $p = 0,95$ .

Розв'язання:

Обчислюємо інструментальна похибка приладу

$$\theta = \frac{1 \cdot 30}{100} = 0,3 \text{ В}.$$

Знаходимо:

$$\bar{x} = \frac{10,1+10,2+10,1}{3} = 10,133333 \text{ В}.$$

Визначаємо:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{3 \cdot 2} \cdot [(10,1 - \bar{x})^2 + (10,2 - \bar{x})^2 + (10,1 - \bar{x})^2]} = 0,0333333$$

Значення

$$\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} = \frac{0,3}{0,0333333} = 9$$

Отже випадковою похибкою можна знехтувати

$$\Delta A \approx \theta = 0,3 \text{ В}$$

тому при  $P=95\%$

$$X = (10,1 \pm 0,3) \text{ В}.$$

### Приклад 3.6.



За допомогою манометру ДМ 05 з діапазоном вимірювання від 0 до 1,0 МПа, клас точності якого  $K = 1,0$  добуто результат спостереження 0,255 МПа. Записати результат одноразового вимірювання.

*Розв'язання:*

Така позначка класу точності свідчить про те, що він нормується по приведеній похибці.

$$K = \delta = \frac{\Delta_x}{N} \cdot 100,$$

де,  $N$  - нормоване значення приладу (діапазон вимірювання).

Тому інструментальна похибка приладу складає:

$$\theta = k \cdot N / 100$$

Величина  $\theta$  називається надійною межею невиключених залишків систематичних похибок.

$$\theta = \frac{1,0 \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}}{100} = 10 \text{ КПа}.$$

Тоді остаточний запис результату вимірювання з округленням матиме такий вигляд:

$$A = 0,255 \text{ МПа}.$$

### **Приклад 3.7.**

За допомогою мембранного лічильника Г6С з діапазоном вимірювання від мінімальної витрати 0,06 до максимальної 10,00 м<sup>3</sup>/год добуто результат спостереження 4,4565 м<sup>3</sup>/год, якщо ціна ділення приладу 0,2 дм<sup>3</sup>, відносна похибка до витрати 0,6 м<sup>3</sup>/год дорівнює  $\pm 3,0\%$ , а від 0,6 до 10,00 м<sup>3</sup>/год – 1,5%. Записати результат одноразового вимірювання.

*Розв'язання:*

Відносна похибка вимірювання дорівнює:

$$\delta = \frac{\Delta_x}{x} \cdot 100,$$

де,  $x$  – вимірювальна витрата газу.

Тому інструментальна похибка приладу при вимірюванні 4,4565 м<sup>3</sup>/год складає:

$$\theta = \Delta_x = \frac{\delta \cdot x}{100} = \frac{1,5 \cdot 4,4565}{100} = 0,05 \text{ м}^3 / \text{год}.$$

Величина  $\theta$  називається надійною межею невиключених залишків систематичних похибок.

Тоді остаточний запис результату вимірювання матиме такий вигляд:

$$A = 4,46 \text{ м}^3 / \text{год}.$$

### **Приклад 3.8.**

За допомогою вольтметра класу точності  $k=1,0$  з одnobічною шкалою 0...30 В добуто результат спостереження 16,25 В. Записати результат одноразового вимірювання.

*Розв'язання:*

Знаходимо

$$\theta = \frac{1 \cdot 30}{100} = 0,3 \text{ В}.$$

Тоді остаточний запис результату вимірювання з округленням матиме такий вигляд:

$$A \approx 16,3 \text{ В}$$

### Приклад 3.9

Комбінований прилад для вимірювання електричної напруги, струму та електричного опору має позначення класу точності 2,5. Записати результат вимірювання опору, який становить  $R=0,2 \text{ кОм}$  на шкалі  $0 \dots \infty \text{ кОм}$ . Довжина шкали приладу  $L=120 \text{ мм}$ , а поділка шкали завдовжки  $l_x=4 \text{ мм}$  біля значення вимірюваного опору відповідає  $R_x=0,04 \text{ кОм}$ .

Розв'язання:

Чутливість у точці відліку:

$$S_x = \frac{l_x}{R_x} = \frac{4}{0,04} = 100 \text{ мм/кОм}$$

Абсолютна похибка результату вимірювання

$$\Delta_R = \frac{kL}{100S_x} = \frac{2,5 \cdot 120}{100 \cdot 100} = 0,03 \text{ кОм}$$

Результат вимірювання

$$R=0,20 \text{ кОм.}$$

### Приклад 3.10

Показ лічильника енергії  $W=0280,7 \text{ кВт}\cdot\text{год}$ . Клас точності приладу 1,5  
Записати результат вимірювання.

Розв'язання:

Оскільки відносна похибка дорівнює:

$$\delta_w = \frac{\Delta_w}{W} \cdot 100$$

Тоді абсолютна похибка буде складати:

$$\Delta_w = \frac{W\delta_w}{100} = \frac{280,7 \cdot 1,5}{100} = 4,2105 = 4 \text{ кВт}\cdot\text{год}$$

Результат вимірювання енергії:

$$W=281 \text{ кВт}\cdot\text{год.}$$

### Приклад 3.11

Дати оцінку точності вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1=(220 \pm 10) \text{ кг}$ ,  $S_2=(60 \pm 10) \text{ кг}$ , кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^\circ$ , діаметр барабана  $0,22 \text{ м}$ , швидкість руху стрічки  $v=1 \text{ м/с}$ , погонна маса стрічки  $q=7,6 \text{ кг}$ , товщини стрічки  $h=1,0 \text{ см}$ .

Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3.

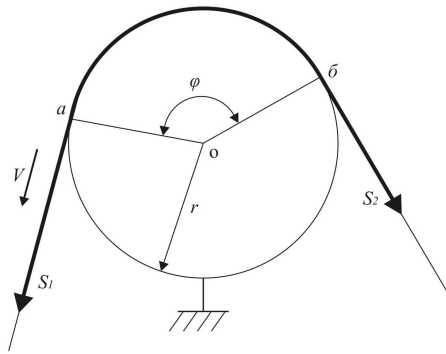


Рис. 3.3. Розрахункова схема:  $S_1$ ,  $S_2$  – більша й менша сили, які прикладені до кінців гнучкого тіла (натягування в збігаючій й набігаючій на блок гілках гнучкого тіла) при ковзанні;  $r$  – радіус блоку;  $\varphi$  – кут обхвату блоку гнучким тілом;  $v$  – напрямок руху.

Силу тертя між стрічкою та барабаном у відповідності з законом тертя гнучких тіл Ейлера визначають за формулою:

$$F = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600H$$

де  $F$  – сила тертя між стрічкою та барабаном;  $S_1$ ,  $S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки.

Але закон тертя гнучких тіл Ейлера справедливий для ідеальної нитки, для якої товщина дорівнює нулю. Тому виникає методична складова систематичної похибки від неврахування товщини стрічки, див. рис. 3.4.

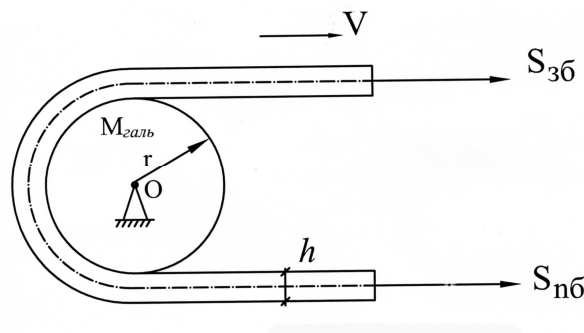


Рис. 3.4. Розрахункова схема взаємодії конвеєрної стрічки та барабана:  $S_1$ ,  $S_2$  – зусилля в набігаючій та збігаючій ланках стрічки;  $r$  – радіус барабана;  $v$  – швидкість руху стрічки;  $h$  – товщина гнучкого тіла.

В нашому випадку рівняння рівноваги моментів сил має такий вигляд:

$$\sum M_o = S_1 \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - S_{2б} \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) - M_{галь} = 0$$

де,  $r$  – радіус барабана;  $t$  – товщина стрічки.

Або:

$$(S_1 - S_2) \cdot \left(r + \frac{t}{2}\right) = F_{\delta} \cdot r ;$$

Звідки дійсне значення сили тертя:

$$F_{\delta} = \left(r + \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{r} \cdot (S_1 - S_2) = \left(1 + \frac{t}{2r}\right) \cdot (S_1 - S_2) = 0,045 \cdot (2200 - 600) = 1670H$$

Методична складова систематичної похибки складає:

$$\Delta_F = F - F_\delta = -\frac{t}{2r} \cdot (S_1 - S_2) = -\frac{0,01}{0,22} \cdot (2200 - 600) \cong -0,045 \cdot 1600 \cong -72 \text{ Н}$$

$$\Delta_F, \% = \frac{\Delta_F}{F_\delta} \cdot 100\% \cong -\frac{72}{1670} \cdot 100\% \cong -4,5\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення параметру без врахування методичної похибки.

$$\Delta_{\max} = \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial F}{\partial S_1} \right| \Delta S_1 \pm \left| \frac{\partial F}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 = \pm(0,045 \cdot \Delta S_1) \pm \pm(0,045 \cdot \Delta S_2) = \pm(0,045 \cdot 10) \pm (0,045 \cdot 10) = \pm 9 \text{ Н}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \approx \pm 6 \text{ Н}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta F = (\Delta_F \pm \Delta) = (-72 \pm 6) \text{ Н}$$

### Приклад 3.12.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^\circ$ .

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з доведеннями Ейлера коефіцієнт тертя між гнучким тілом (невагомої, нерозтяжною й абсолютно гнучкою ниткою) та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200}{600} = \frac{1,22}{3,14} = 0,41.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера коефіцієнт тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\delta = \frac{F_\delta}{N_\delta},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_\delta = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\delta = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя складає:

$$\mu_\delta = \frac{F_\delta}{N_\delta} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між

тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{\mu} = \mu - \mu_{\partial} = 0,41 - 0,36 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu}, \% = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{\mu_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{0,05}{0,36} \cdot 100\% \cong -14,0\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки.

$$\Delta_{\text{max}} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right| = \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial S_1} \right| \Delta S_1 \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 = \pm \frac{1}{\varphi^2} \cdot \ln \frac{S_1}{S_2} \cdot \Delta \varphi \pm \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{S_1} \cdot \Delta S_1 \pm \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{S_2} \cdot \Delta S_2 =$$

$$= \pm \frac{1}{3,14^2} \cdot \ln \frac{2200}{600} \cdot 0,035 \pm \frac{1}{3,14} \cdot \frac{1}{2200} \cdot 10 \pm \frac{1}{3,14} \cdot \frac{1}{600} \cdot 10 = \pm 0,073.$$

Найвірогідніше значення систематичної похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{0,005^2 + 0,013^2 + 0,053^2} \approx \pm 0,05.$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta \mu = \Delta_{\mu} + \Delta = (0,05 \pm 0,05)$$

### Приклад 3.13

*Дати оцінку точності непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^{\circ}$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погона маса стрічки  $q = 7,6$  кг (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо).*

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з доведеннями Ейлера (та впливом відцентрових сил стрічки) коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямо вимірюванням за формулою:

$$\mu = \frac{1}{\varphi} \cdot \ln \frac{S_1 - q \cdot v^2}{S_2 - q \cdot v^2} = \frac{1}{3,14} \cdot \ln \frac{2200 - 7,6 \cdot 1^2}{600 - 7,6 \cdot 1^2} = 0,42.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}}.$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера визначається з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\delta} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ кГ}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання коефіцієнта тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_{\mu} = \mu - \mu_{\delta} = 0,42 - 0,37 = 0,05$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м.}}}{\mu_{\delta}} \cdot 100\% \cong \frac{0,05}{0,37} \cdot 100\% \cong 13,5\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо):

$$\Delta_{\text{max}} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right| = \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial S_1} \right| \Delta S_1 \pm \left| \frac{\partial \mu}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 = \pm \frac{1}{\varphi^2} \cdot \ln \frac{S_1 - q \cdot v^2}{S_2 - q \cdot v^2} \cdot \Delta \varphi \pm \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{S_1 - q \cdot v^2} \cdot \Delta S_1 \pm \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{S_2 - q \cdot v^2} \cdot \Delta S_2 = \pm \frac{1}{3,14^2} \cdot \ln \frac{220}{60} \cdot 0,035 \pm \frac{1}{3,14} \cdot \frac{1}{220 - 7,6 \cdot 1^2} \cdot 10 \pm \frac{1}{3,14} \cdot \frac{1}{60 - 7,6 \cdot 1^2} \cdot 10 = \pm 0,085.$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{0,005^2 + 0,016^2 + 0,064^2} \approx \pm 0,06$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta \mu = \Delta_{\mu} + \Delta = (0,05 \pm 0,06)$$

### Приклад 3.14

*Дати оцінку точності непрямого вимірювання сили тертя між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^{\circ}$ .*

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з доведеннями Ейлера розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться за формулою:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu \varphi} - 1).$$

По новому розв'язанню задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\delta} = \frac{F_{\delta}}{N_{\delta}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанню задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\delta} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = S_1 - S_2 = 2200 - 600 = 1600H$$

Тоді:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4396} = 0,36..$$

Тому:

$$F_E = S_2 \cdot (e^{\mu\varphi} - 1) = 600(2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 1258H$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_{\partial} = 1258 - 1600 = -332H$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_E}{F_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{332}{1600} \cdot 100\% \cong -21\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки.

$$\Delta_{\max} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial F}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial F}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm (e^{\mu\varphi} - 1) \cdot \Delta S_2 \pm \pm S_2 \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot e^{\mu\varphi} \cdot \Delta \mu \pm S_2 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot e^{\mu\varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 209 \pm 0 \pm 180,6 = 395H$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{209^2 + 180,6^2} \approx \pm 250H$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta F = (\Delta_F \pm \Delta) = (-332 \pm 250)H$$

### Приклад 3.15.

Дати оцінку точності визначення непрямого вимірювання сили тертя між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^{\circ}$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погона маса стрічки  $q = 7,6$  кг (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо).

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункова сила тертя між гнучким тілом та барабаном, як відомо, знаходиться непрямым вимірюванням за формулою:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu\varphi} - 1).$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя визначається прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, знаходиться з виразу:

$$N_o = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 0,314 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ H}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_o = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ H}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_o = \frac{F_o}{N_o} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому:

$$F_E = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) = (600 - 7,6 \cdot 1,0^2) \cdot (2,71^{0,373,14} - 1) = 1300 \text{ H}.$$

Таким чином, методична складова похибки непрямого вимірювання сили тертя між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_F = F_E - F_o = 1300 - 1600 = -300 \text{ H};$$

$$\Delta_{\mu, \%} = \frac{\Delta_F}{F_o} \cdot 100\% \cong -\frac{300}{1600} \cdot 100\% \cong -18,8\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо).

$$\begin{aligned} \Delta_{\max} &= \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial F}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial F}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial F}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) \cdot \Delta S_2 \pm \\ &\pm \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\varphi} \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta \mu \pm \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 229 \pm 0 \pm 204 = 433 \text{ H} \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{229^2 + 204^2} \approx \pm 300 \text{ H}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta F = (\Delta_F \pm \Delta) = (-300 \pm 300) \text{ H}$$

### Приклад 3.16

Дати оцінку точності непрямого вимірювання нормальної реакції між ниткою та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^{\circ}$ .

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряду залежать фрикційні властивості.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами знаходиться непрямо з виразу:



$$N = \int_0^{\varphi} S(\alpha) d\alpha = \int_0^{\varphi} S_2 \cdot e^{\mu \cdot \varphi} d\alpha = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu \varphi} - 1)$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_{\partial} = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{ Н}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_{\partial} = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_{\partial} = \frac{F_{\partial}}{N_{\partial}} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Звідси нормальна реакція між тілами за доведеннями Ейлера складає:

$$N = \frac{S_2}{\mu} (e^{\mu \varphi} - 1) = \frac{600}{0,36} (2,71^{0,36 \cdot 3,14} - 1) = 3495 \text{ Н}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_{\partial} = 3495 - 4396 = -901 \text{ Н};$$

$$\Delta_N, \% = \frac{\Delta_N}{N_{\partial}} \cdot 100\% \cong -\frac{901}{4396} \cdot 100\% \cong -20,5\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки.

$$\begin{aligned} \Delta_{\max} &= \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial N}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial N}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial N}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm \frac{1}{\mu} (e^{\mu \varphi} - 1) \cdot \Delta S_2 \pm \\ &\pm 0 \pm \frac{S_2}{\mu^2} \cdot e^{\mu \varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 211 \pm 0 \pm 102,6 = 313,6 \text{ Н} \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial N}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{211^2 + 102,6^2} \approx \pm 200 \text{ Н}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta N = (\Delta_N \pm \Delta) = (-901 \pm 200) \text{ Н}.$$

### Приклад 3.17.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання нормальної реакції між реальним гнучким тілом та барабаном при ковзанні на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^{\circ}$ , швидкість руху стрічки  $v = 1$  м/с, погона маса стрічки  $q = 7,6$  кг (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо).

### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

В практиці експлуатації транспортної машини нормальну реакцію між гнучким тілом та барабаном ніколи не визначали і не задавали. Проте від умов випробування матеріалів – нормальної реакції між тілами напряму залежать фрикційні властивості.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з доведеннями Ейлера нормальна реакція між тілами з врахуванням відцентрових сил знаходиться з виразу:

$$N = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1).$$

где  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial}.$$

За новим розв'язанням задачі Ейлера нормальна реакція між тілами складає:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372 \text{ Н}.$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{ Н}.$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Звідки нормальна реакція між тілами за рівнянням Ейлера складає:

$$N = \int_0^\varphi S(\alpha) \cdot d\alpha = \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) = \frac{600 - 7,6 \cdot 1,0^2}{0,37} \cdot (2,71^{0,37 \cdot 3,14} - 1) = 3513 \text{ Н}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання нормальної реакції між тілами у відповідності до рівняння тертя гнучких тіл Ейлера складає:

$$\Delta_N = N - N_\partial = 3513 - 4372 = 858 \text{ Н};$$

$$\Delta_N, \% = \frac{\Delta_N}{N_\partial} \cdot 100\% \cong -\frac{858}{4372} \cdot 100\% \cong -19,6\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо):

$$\begin{aligned} \Delta_{\max} &= \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial N}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial N}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial N}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial N}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm \frac{1}{\mu} (e^{\mu \cdot \varphi} - 1) \cdot \Delta S_2 \pm \\ &\pm 0 \pm \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu^2} \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 604,6 \pm 0 \pm 418,8 = 1023,4 \text{ Н} \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial N}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{604,6^2 + 418,8^2} \approx \pm 700 \text{ Н}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta N = (\Delta_N \pm \Delta) = (-858 \pm 700) \text{H}.$$

### Приклад 3.18.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання зусилля натягування нитки  $S(\alpha)$  при ковзанні по барабану на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^\circ$ .

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. Згідно з виведеннями Ейлера, натягування гнучкого тіла по лінії контакту з барабаном визначається функцією:

$$S(\alpha) = S_2 e^{\mu \cdot \alpha}$$

де  $S(\alpha)$  – зусилля натягування гнучкого тіла в заданому перетині гнучкого тіла;  $\varphi$  – кут обхвату барабана гнучким тілом;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu = \frac{F_\delta}{N_\delta}$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$N_\delta = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2}{2} = 3,14 \cdot \frac{2200 + 600}{2} = 4396 \text{H}$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\delta = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600 \text{H}$$

Тоді коефіцієнт тертя:

$$\mu_\delta = \frac{F_\delta}{N_\delta} = \frac{1600}{4396} = 0,36.$$

Тому, натягування гнучкого тіла по середній лінії контакту при терті по блоку за рівнянням Ейлера складає:

$$S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = S_2 \cdot e^{\mu \cdot \varphi / 2} = 600 \cdot 2,71^{0,36 \cdot 1,57} = 1050 \text{H}$$

Дійсне натягування гнучкого тіла за новим рівнянням тертя гнучких тіл 2007 р. складає:

$$S(\alpha)_\delta /_{a=\frac{\varphi}{2}} = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 = 1400 \text{H}.$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла на середині контакту з блоком складає:

$$\Delta_S = S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}} - S(\alpha)_\delta /_{a=\frac{\varphi}{2}} = 1050 - 1400 = -350 \text{H};$$

$$\Delta_{S, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}}} \cdot 100\% \cong -\frac{350}{1400} \cdot 100\% \cong -25\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по

відомій методиці без врахування методичної похибки.

$$\Delta_{\max} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial S}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial S}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta S_2 \pm \pm 0 \pm \frac{S_2}{\mu} \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 176 \pm 0 \pm 103 = 279H$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{176^2 + 103^2} \approx \pm 200H$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta S = (\Delta_s \pm \Delta) = (-350 \pm 200)H$$

### Приклад 3.19.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання зусилля натягування реального гнучкого тіла  $S(\alpha)$  по середині лінії контакту з барабаном при ковзанні по барабану на лабораторному стенді з використанням закону тертя гнучких тіл Ейлера, якщо  $S_1 = (220 \pm 10)$  кГ,  $S_2 = (60 \pm 10)$  кГ, кут обхвату стрічкою барабана  $\varphi$  складає  $(180 \pm 2)^\circ$ , швидкість руху стрічки  $v - 1$  м/с, погонна маса стрічки  $q - 7,6$  кг (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо).

*Розв'язання.*

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Розглянемо розрахункову схему рис. 3.3. В рамках доведення Ейлера з врахуванням впливу відцентрових сил розрахункове зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном складає:

$$S(a) = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\mu a} + q \cdot v^2.$$

де  $S(a)$  – зусилля натягування гнучкого тіла вздовж лінії контакту з барабаном;  $q$  – лінійна маса гнучкого тіла;  $a$  – кут перетину гнучкого тіла;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між гнучким тілом та барабаном.

За новим розв'язанням задачі Ейлера дійсне значення коефіцієнта тертя пари тертя знаходиться прямо, як відношення дійсних сили тертя до нормальної реакції між тілами:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial},$$

Дійсне значення нормальної реакції між тілами по новому розв'язанню задачі Ейлера, яке враховує закон збереження механічної енергії, визначається виразом:

$$N_\partial = \varphi \cdot \frac{S_1 + S_2 - 2 \cdot q \cdot v^2}{2} = 3,14 \frac{2200 + 600 - 2 \cdot 7,6 \cdot 1^2}{2} = 4372H$$

Дійсне значення сили тертя:

$$F_\partial = (S_1 - S_2) = (2200 - 600) = 1600H$$

А коефіцієнт тертя:

$$\mu_\partial = \frac{F_\partial}{N_\partial} = \frac{1600}{4372} = 0,37.$$

Тому, натягування гнучкого тіла за рівнянням тертя Ейлера складає:

$$S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = (S_2 - q \cdot v^2) \cdot e^{\mu \cdot \frac{\varphi}{2}} + q \cdot v^2 = (600 - 7,6 \cdot 10^2) \cdot 2,71^{0,371,57} + 7,6 \cdot 10^2 = 1066 \text{ Н.}$$

Але дійсне натягування гнучкого тіла за новим розв'язанням задачі Ейлера знаходиться з виразу:

$$S(\alpha) = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \alpha + S_2 + qv^2 \dots$$

Звідки дійсне розшукуване натягування гнучкого тіла складає:

$$S(\alpha) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = \frac{S_1 - S_2}{\varphi} \cdot \varphi / 2 + S_2 + qv^2 = \frac{2200 - 600}{3,14} \cdot 1,57 + 600 + 8 = 1416 \text{ Н.}$$

Тому, методична складова похибки непрямого вимірювання натягування гнучкого тіла складає:

$$\Delta_S = S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} - S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}} = 1066 - 1416 = -336 \text{ Н;}$$

$$\Delta_{S, \%} = \frac{\Delta_{\text{сист.м}}}{S(a) /_{a=\frac{\varphi}{2}}} \cdot 100\% \cong -\frac{336}{1416} \cdot 100\% \cong -23,7\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення розшукуваного параметра по відомій методиці без врахування методичної похибки (для спрощення похибками визначення швидкості та лінійної маси знехтуємо):

$$\Delta_{\max} = \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial S}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial S}{\partial S_2} \right| \Delta S_2 \pm \left| \frac{\partial S}{\partial \mu} \right| \Delta \mu \pm \left| \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right| \Delta \varphi = \pm e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta S_2 \pm$$

$$\pm 0 \pm \frac{S_2 - q \cdot v^2}{\mu} \cdot e^{\mu \cdot \varphi} \cdot \Delta \varphi = \pm 329 \pm 0 \pm 159 = 488 \text{ Н}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{329^2 + 159^2} \approx \pm 350 \text{ Н}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta S = (\Delta_S \pm \Delta) = (-336 \pm 350) \text{ Н}$$

### Приклад 3.20.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзду з масою електровозу  $m_e = 5 \text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_v = 3,1 \text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складу складає  $8 \text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9 \text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску з ухилом  $i = 10\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30 \text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = 8 \text{ км/год}$ .

#### Розв'язання

На рис. 3.5. представлений графік умовної зміни швидкості руху (V) поїзда від часу (t) в період гальмування за діючою методикою:

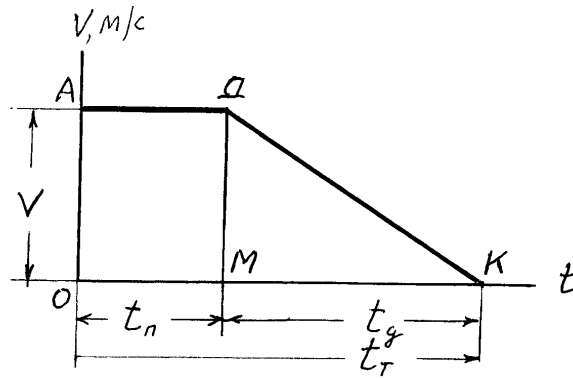


Рис. 3.5. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальма до дії;  $t_d$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування.

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$

де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює 3,4 сек);  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзда при гальмуванні.

Прискорення руху поїзда визначається з рівняння руху поїзда при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8-10 + \frac{9000}{(5+5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,39 \text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху составу.

Звідки:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 - 6,33 = 1,23 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} - (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 - 23,40} + 1,33 \text{ м/с}^2.$$

Тому рівняння не мають розв'язань.

Якщо керуватись допущенням діючої методики - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 6,33 = 13,89 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,39)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30} + (-0,39) \cdot 3,4 = \sqrt{1,76 + 23,40} - 1,33 = 5,02 - 1,33 = 3,69 \text{ м/с}^2.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзда в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху поїзда в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений, що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 3.6.

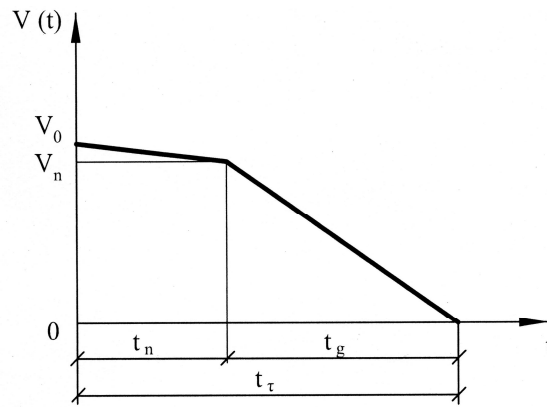


Рис. 3.6. Графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування:  $t_m$  - час гальмування;  $t_n$  - час підготовки гальм до дії;  $t_\delta$  - дійсний час гальмування;  $V_0$  - швидкість поїзда в момент початку гальмування;  $V_n$  - швидкість поїзда в момент прикладення гальмівної сили  $B$ .

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^\delta = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} \text{ м.}$$

$$V_{\delta on}^\delta = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)};$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії знаходиться з рівняння руху поїзда в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 10}{110} = +0,02 \text{ м/с}^2.$$

Тому:

$$l_m^\delta = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,02 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,02 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,39)} = 7,56 + 0,12 + 6,71 = 14,39 \text{ м.}$$

$$V_{\delta on}^\delta = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 + \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30 + 0,02 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 2340 - 0,09} = -1,36 + 5,01 = 3,65 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзду, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні, складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Тому, методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою складає:

$$\Delta_{\text{сисч.}l} = l_m - l_m^\delta = 13,89 - 14,39 = -0,50 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сисч.}l, \%} = \frac{\Delta_{\text{сисч.}l}}{l_m^\delta} \cdot 100\% \cong \frac{-0,5}{14,39} \cdot 100\% \cong -3,47\%.$$

$$\Delta_{\text{сисч.}v} = V_{\delta on} - V_{\delta on}^\delta = 3,69 - 3,65 = 0,04 \text{ м/с}$$

$$\Delta_{\text{сисч.}v, \%} = \frac{\Delta_{\text{сисч.}v}}{V_{\delta on}^\delta} \cdot 100\% \cong \frac{0,04}{3,65} \cdot 100\% \cong 1,10\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення гальмового шляху по відомій методиці без врахування методичної похибки (похибку визначення часу підготовки  $t_n$  та

розрахункового прискорення  $a$  при гальмуванні прийmemo рівними нулю):

$$\Delta l_{\max} = \pm \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial l}{\partial V_0} \right| \Delta V_0 \pm \left| \frac{\partial l}{\partial a} \right| \cdot \Delta a \pm \left| \frac{\partial l}{\partial t_n} \right| \cdot \Delta t_n = \pm \left( t_n - \frac{V_0}{a} \right) \cdot \Delta V_0 \pm \frac{V_0^2}{2 \cdot a^2} \cdot \Delta a \pm V_0 \cdot \Delta t_n =$$

$$= \pm \left( 3,4 + \frac{8}{3,6 \cdot 0,39} \right) \cdot \frac{0,1}{3,6} \pm \frac{4,94}{2 \cdot 0,39^2} \cdot 0,001 \pm \frac{8}{3,6} \cdot 0 = \pm (3,4 + 5,69) \cdot \frac{0,1}{3,6} \pm 0,02 \pm 0 = \pm 0,25 \pm 0,02 = \pm 0,27 \text{ м}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta l = \pm \sqrt{\sum \left( \frac{\partial l}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \pm 0,25 \text{ м}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta L = \Delta l_c + \Delta l = (-0,50 \pm 0,25) \text{ м.}$$

Найбільше значення загальної похибки визначення допустимої швидкості руху електропоїзду по відомій методиці без врахування методичної похибки (похибку визначення часу підготовки  $t_n$  та розрахункового прискорення  $a$  при гальмуванні прийmemo рівними нулю):

$$\Delta v_{\max} = \pm \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial v}{\partial a} \right| \Delta a \pm \left| \frac{\partial v}{\partial t_n} \right| \cdot \Delta t_n \pm \left| \frac{\partial v}{\partial l_n} \right| \cdot \Delta l_n = \pm \left( \frac{2 \cdot a \cdot t_n^2 - 2 \cdot l_n}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} + t_n \right) \cdot \Delta a \pm \left( \frac{2 \cdot t_n \cdot a^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} + a \right) \Delta t_n \pm \left( \frac{-2 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} \right) \cdot \Delta l_n =$$

$$\pm \left( \frac{2 \cdot 0,39 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot 30}{\sqrt{0,39^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,39) \cdot 30}} + 3,4 \right) \cdot 0,001 \pm 0 \pm 0 = \pm 0,008 \text{ м/с}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta v = \pm \sqrt{\sum \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \approx \pm 0,008 \text{ м/с.}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta V = \Delta v_c + \Delta v = (0,040 \pm 0,008) \text{ м/с}$$

### Приклад 3.21.

Дати оцінку точності непрямого вимірювання гальмового шляху і допустимої швидкості руху шахтного електропоїзду з масою електровозу  $m_e = 5 \text{ т}$  та 5 завантажених вагонеток масою  $m_b = 3,1 \text{ т}$ , яка не визиває перевищення нормативного шляху при гальмуванні, якщо питомий основний опір руху складує  $8 \text{ Н/кН}$ , гальмова сила  $B = 9 \text{ кН}$ . Гальмування здійснюється на спуску з ухилом  $i = 45\%$ , нормований гальмовий шлях складає  $l_n = 30 \text{ м}$ , швидкість руху при початку гальмування  $V_0 = (8 \pm 0,1) \text{ км/год}$ .

#### Розв'язання

Правильність вимірювання - характеристика якості вимірювань, що відображує близькість до нуля систематичної складової похибки вимірювання.

На рис. 3.5. представлений графік умовної зміни швидкості руху ( $V$ ) поїзда від часу ( $t$ ) в період гальмування за діючою методикою:

Згідно діючої методики довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзду, яка забезпечує заданий нормативний гальмовий шлях, складає:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n;$$



де  $t_n$  – шлях підготовки гальма до дії (для шахтного електровозу дорівнює 3,4 сек);  $l_n$  – нормований гальмовий шлях;  $V_0$  – швидкість поїзду в момент початку гальмування;  $a$  – прискорення (уповільнення) поїзду при гальмуванні.

Прискорення руху поїзда знаходиться з рівняння руху поїзду при гальмуванні за формулою:

$$a = -\frac{w \pm i + \frac{B}{m_n \cdot g}}{\Delta} = -\frac{8 - 45 + \frac{9000}{(5 + 5 \cdot 3,1) \cdot 9,8}}{110} = -0,072 \text{ м/с}^2$$

де  $w$  – питомий основний опір руху составу.

Тому:

$$l_m = V_0 \cdot t_n + \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} + \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 - 34,29 = -26,73 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 + 2 \cdot a \cdot l_n} - a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 + 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} - (-0,072) \cdot 3,4 = \sqrt{0,06 - 4,32} + 0,088 \text{ м/с}^2.$$

Тобто рівняння не має розв'язання.

Якщо керуватись допущенням в діючій методиці - постійна швидкість руху поїзда в період підготовки гальма до дії, знехтувати промахом в рівняннях та скористатись відповідними формулами:

$$l_m = V_0 \cdot t_n - \frac{V_0^2}{2 \cdot a} = \frac{8 \cdot 3,4}{3,6} - \frac{64}{12,96 \cdot 2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 34,29 = 41,85 \text{ м}$$

$$V_{\text{дон}} = \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n} + a \cdot t_n = \sqrt{(-0,072)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30} + (-0,072) \cdot 3,4 = \sqrt{0,06 + 4,32} - 0,24 = 2,09 - 0,24 = 1,85 \text{ м/с}.$$

Насправді спостерігається досить різноманітний (не з постійною швидкістю) характер руху поїзду в період часу підготовки гальма до дії. Залежність швидкості руху поїзду в період підготовки гальма до дії може бути як сповільнений так і прискорений, що визначається характеристиками траси й параметрами поїзда, наприклад, рис. 2.4.:

Довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху поїзда в дійсності складає:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a}.$$

$$V_{\text{дон}}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)};$$

де  $a_0$  – прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії.

Прискорення поїзду в періоді підготовки гальма до дії визначається з рівняння руху поїзду в режимі – вільний вибіг:

$$a_0 = -\frac{w \pm i}{\Delta} = -\frac{8 - 45}{110} = +0,33 \text{ м/с}^2.$$

Звідси:

$$l_m^{\partial} = V_0 \cdot t_n + \frac{a_0 \cdot t_n^2}{2} - \frac{(V_0 + a_0 \cdot t_n)^2}{2 \cdot a} = 7,56 + \frac{0,33 \cdot 11,56}{2} - \frac{(2,22 + 0,33 \cdot 3,4)^2}{2 \cdot (-0,072)} = 7,56 + 1,91 + 77,56 = 87,03 \text{ м}.$$

$$V_{\text{дон}}^{\partial} = (a - a_0) \cdot t_n + \sqrt{(a - a_0)^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_u + a_0 \cdot t_n^2 \cdot (a - a_0)} = (-0,40) \cdot 3,4 + \sqrt{(-0,40)^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30 + 0,33 \cdot 11,56 \cdot (-0,40)} = -1,36 + \sqrt{1,84 + 4,32 - 1,52} = -1,36 + 2,15 - 1,42 = 0,79 \text{ м/с}$$

Таким чином, дійсна довжина гальмового шляху та допустима швидкість руху шахтного електропоїзду, яка забезпечує заданий гальмовий шлях при гальмуванні,

складає 87,03 м та 0,79 м/с<sup>2</sup> відповідно.

Методична складова систематичної похибки непрямого вимірювання параметрів руху поїзда за діючою методикою, складає:

$$\Delta_{\text{сшс.}l} = l_m - l_m^{\partial} = 41,85 - 87,03 = -45,18 \text{ м}$$

$$\Delta_{\text{сшс.}l, \%} = \frac{\Delta_{\text{сшс.}l}}{l_m^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{-45,18}{87,03} \cdot 100\% \cong -52\%.$$

$$\Delta_{\text{сшс.}v} = V_{\text{дон}} - V_{\text{дон}}^{\partial} = 1,85 - 0,79 = 1,06 \text{ м/с}$$

$$\Delta_{\text{сшс.}v, \%} = \frac{\Delta_{\text{сшс.}v}}{V_{\text{дон}}^{\partial}} \cdot 100\% \cong \frac{1,06}{0,79} \cdot 100\% \cong 134\%.$$

Найбільше значення загальної похибки визначення гальмового шляху по відомій методиці без врахування методичної похибки (похибку визначення часу підготовки  $t_n$  та розрахункового прискорення  $a$  при гальмуванні прийmemo рівними нулю):

$$\begin{aligned} \Delta_{l_{\max}} &= \pm \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial l}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial l}{\partial V_0} \right| \Delta V_0 \pm \left| \frac{\partial l}{\partial a} \right| \cdot \Delta a \pm \left| \frac{\partial l}{\partial t_n} \right| \cdot \Delta t_n = \pm (t_n - \frac{V_0}{a}) \cdot \Delta V_0 \pm \frac{-V_0^2}{2 \cdot a^2} \cdot \Delta a \pm V_0 \cdot \Delta t_n = \\ &= \pm (3,4 + \frac{8}{3,6 \cdot 0,072}) \cdot \frac{0,1}{3,6} \pm \frac{4,94}{2 \cdot 0,072} \cdot 0,001 \pm \frac{8}{3,6} \cdot 0 = \pm (3,4 + 30,86) \cdot \frac{0,1}{3,6} \pm 0,48 = \pm 0,95 \pm 0,48 = \pm 1,43 \text{ м} \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta l = \pm \sqrt{\sum \left( \frac{\partial l}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \approx \pm 1,0 \text{ м}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta L = \Delta_{lc} + \Delta l = (-45,18 \pm 1,06) \text{ м.}$$

Найбільше значення загальної похибки визначення допустимої швидкості руху електропоїзду по відомій методиці без врахування методичної похибки (похибку визначення часу підготовки  $t_n$  та розрахункового прискорення  $a$  при гальмуванні прийmemo рівними нулю):

$$\begin{aligned} \Delta_{v_{\max}} &= \pm \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i = \pm \left| \frac{\partial v}{\partial a} \right| \Delta a \pm \left| \frac{\partial v}{\partial t_n} \right| \cdot \Delta t_n \pm \left| \frac{\partial v}{\partial l_n} \right| \cdot \Delta l_n = \pm \left( \frac{2 \cdot a \cdot t_n^2 - 2 \cdot l_n}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} - t_n \right) \cdot \Delta a \pm \left( \frac{2 \cdot t_n \cdot a^2}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} + a \right) \Delta t_n \pm \\ &\pm \left( \frac{-2 \cdot a}{2 \cdot \sqrt{a^2 \cdot t_n^2 - 2 \cdot a \cdot l_n}} \right) \cdot \Delta l_n = \pm \left( \frac{-1,665 - 6,8}{\sqrt{0,072^2 \cdot 3,4^2 - 2 \cdot (-0,072) \cdot 30}} - 3,4 \right) \cdot 0,001 \pm 0 \pm 0 = \pm 0,0006 \text{ м/с} \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки без врахування методичної похибки.

$$\Delta v = \pm \sqrt{\sum \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \pm 0,0006 \text{ м/с.}$$

Сумарна похибка визначення параметра з врахуванням методичної похибки

$$\Delta V = \Delta_{vc} + \Delta v = (1,0600 \pm 0,0006) \text{ м/с}$$

### ПРИКЛАД 3.22.

Дати оцінку точності визначення коефіцієнта опору руху макета вагонетки непрямым методом на самокатній гірці, якщо її параметри пересування по гірці такі:  $h = (20,4 \pm 0,2) \text{ см}$ ;  $l_2 = (98,6 \pm 0,2) \text{ см}$  і  $l_3 = (301,6 \pm 20,0) \text{ см}$ , а довірча вірогідність  $p = 0,95$ .

#### Розв'язання

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою

вимірювання.

Обчислимо коефіцієнт опору руху непрямим методом на самокатній гірці:

$$\omega = \frac{h}{l_2 + l_3} = \frac{20,4}{98,6 + 301,6} = 0,050.$$

де  $h$  – висота установки вагонетки над ланкою горизонтального шляху вагонетки;  $l_2$  – проекція ланки похилого шляху вагонетки на горизонталь;  $l_3$  – ланка горизонтального шляху вагонетки.

Систематичну методичну похибку визначення коефіцієнта опору руху знайти не можемо, так як умови випробування вагонетки за прямим методом (зразковим методом) – швидкість руху та уклін траси постійні, що не відповідає умовам випробування на самокатній гірці – швидкість руху та уклін траси в період випробування змінюються. Тобто, прямий (зразковий) і непрямий методи визначення параметра між собою несумісні через різні умови випробування.

Найбільше значення загальної похибки визначення параметра без врахування методичної похибки складає:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Delta x_i \right| = \pm \left| \frac{\partial \omega}{\partial h} \Delta h \right| \pm \left| \frac{\partial \omega}{\partial l_2} \Delta l_2 \right| \pm \left| \frac{\partial \omega}{\partial l_3} \Delta l_3 \right| = \pm \left| \frac{1}{l_2 + l_3} \cdot \Delta h \right| \pm \left| \frac{h}{(l_2 + l_3)^2} \cdot \Delta l_2 \right| \pm \left| \frac{h}{(l_2 + l_3)^2} \cdot \Delta l_3 \right| = \\ &= \pm \frac{1}{98,6 + 301,6} \cdot 0,2 \pm \frac{20,4}{400,2^2} \cdot 0,2 \pm \frac{20,4}{400,2^2} \cdot 20 = \pm 0,0030 \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки:

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{25 \cdot 10^{-8} + 0,065 \cdot 10^{-8} + 649 \cdot 10^{-8}} \approx \pm 0,0025.$$

### ПРИКЛАД 3.23.

Дати оцінку точності визначення коефіцієнта тертя фрагмента ланцюга скребкового конвеєра масою  $(20 \pm 0,05)$  кг та ставом скребкового конвеєра по діючій на кафедрі методиці, якщо сила тертя між ними складає  $(6 \pm 1,5)$  кГ при довірчій вірогідності  $p=0,95$ .

*Розв'язання*

Точність вимірювання – близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної фізичної величини, яка характеризується загальною похибкою вимірювання.

Обчислимо коефіцієнт тертя між тілами прямим методом при заданій швидкості руху та уклоні траси при випробуванні:

$$f = \frac{F}{N} = \frac{6}{20} = 0,3.$$

Систематична методична похибка визначення коефіцієнта тертя дорівнює нулю, так як випробування здійснювалось прямим методом.

Найбільше значення сумарної похибки визначення розшукуваного параметра:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| = \pm \left| \frac{\partial f}{\partial N} \Delta N \right| \pm \left| \frac{\partial f}{\partial F} \Delta F \right| = \pm \frac{F}{N^2} \Delta N \pm \frac{1}{N} \Delta F = \\ &= \pm \frac{6}{20^2} \cdot 0,05 \pm \frac{1,5}{20} = \pm 0,00075 \pm 0,075 = \pm 0,07575 \end{aligned}$$

Найвірогідніше значення похибки:

$$\Delta = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{0,00075^2 + 0,075^2} \approx \pm 0,07.$$

### Приклад 3.24.

Знайти похибку одноразового визначення межі міцності гірських порід, якщо сила ( $F$ ) для руйнування стандартного циліндричного зразка на пресі при стисканні складає  $(1,21053 \cdot 10^7 \pm 0,006 \cdot 10^7) \text{ Н}$ , а площа перетину ( $S$ ) зразка –  $(0,0000785 \pm 0,00000001) \text{ м}^2$ .

*Розв'язання:*

Визначемо міцність гірської породи при стисканні зразка на пресі за формулою:

$$\sigma = \frac{F_{cm}}{S} = \frac{1,21053}{0,0000785} = 1542,07643 \text{ МПа}.$$

Найвірогідніше значення похибки визначення межі міцності гірської породи складає:

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial \sigma}{\partial F} \cdot \Delta F \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial S} \cdot \Delta S \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{S} \cdot \Delta F \right)^2 + \left( -\frac{F}{S^2} \cdot \Delta S \right)^2} \approx 600 \text{ Па}.$$

### Приклад 3.25.

Записати результат визначення межі міцності гірських порід, якщо сила ( $F$ ) для розрушення стандартного циліндричного зразка на пресі при стисканні складає  $(1,21053 \cdot 10^7 \pm \quad) \text{ Н}$ , а площа перетину ( $S$ ) зразка –  $0,0000785 \text{ м}^2$ .

*Розв'язання:*

Визначемо міцність гірської породи при стисканні зразка на пресі за формулою:

$$\sigma = \frac{F_{cm}}{S} = \frac{1,21053}{0,0000785} = 1542,07643 \cdot \text{МПа}.$$

Найвірогідніше значення похибки визначення межі міцності гірської породи складає:

$$\Delta = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial \sigma}{\partial F} \cdot \Delta F \right)^2 + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial S} \cdot \Delta S \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{S} \cdot \Delta F \right)^2 + \left( -\frac{m}{S^2} \cdot \Delta S \right)^2} \approx \pm 600 \text{ Па}.$$

Тоді запишемо результат одноразового визначення межі міцності гірських порід:

$$\sigma = (1542,1 \pm 0,6) \text{ Па}.$$

### Приклад 3.26.

Записати результат визначення щільності зразка гірських порід, якщо маса зразка, яка була виміряна, становила  $(2,645 \pm 0,005) \text{ кг}$ , а об'єм –  $(1,128 \pm 0,001) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ .

*Розв'язання:*

Визначемо щільності зразка гірських порід, як відношення його маси до об'єму:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2,645}{1,128 \cdot 10^{-3}} = 2,34486 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Найвірогідніше значення похибки визначення щільності зразка становить:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \Delta m \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \cdot \Delta V \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{V} \cdot \Delta m \right)^2 + \left( -\frac{m}{V^2} \cdot \Delta V \right)^2} = \\ &= \sqrt{19,648 + 4,321} \approx \pm 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \end{aligned}$$

Тоді запишемо результат одноразового визначення щільності зразка гірських порід:

$$\rho = (2,345 \cdot 10^3 \pm 5) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

### Приклад 3.27.

Знайти похибку визначення щільності зразка гірських порід, якщо маса зразка, яка була виміряна, становила  $(2,645 \pm 0,005) \text{ кг}$ , а об'єм –  $(1,128 \pm 0,001) 10^{-3} \text{ м}^3$ .

Розв'язання:

Визначимо щільність зразка гірських порід, як відношення його маси до об'єму:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2,645}{1,128 \cdot 10^{-3}} = 2,34486 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Найвірогідніше значення похибки визначення щільності зразка становить:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial \rho}{\partial m} \cdot \Delta m \right)^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial V} \cdot \Delta V \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{1}{V} \cdot \Delta m \right)^2 + \left( \frac{m}{-V^2} \cdot \Delta V \right)^2} = \\ &= \sqrt{19,648 + 4,321} \approx \pm 5 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \end{aligned}$$

### Приклад 3.28.

Проведеним експериментом встановлено середній час напрацювання на відмову скребкового конвеєра СП202 ( $t_{\text{відм}}$ ) –  $(100 \pm 1)$  год. Знайти похибку визначення імовірності безвідмовної роботи конвеєра  $P(t)$  протягом ( $t$ ) 10 год. і записати результат експерименту.

Розв'язання:

Визначимо частоту відмов:

$$\lambda = \frac{1}{t_{\text{відм}}} = \frac{1}{100} = 0,01 \frac{\text{відм}}{\text{год}}.$$

Значення похибки визначення частоти відмов конвеєра складає:

$$\Delta_\lambda = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \pm \frac{\partial \lambda}{\partial t_{\text{відм}}} \cdot \Delta t_{\text{відм}} = \pm \frac{1}{-t_{\text{відм}}} \cdot \Delta t_{\text{відм}} = \pm 0,0001 \frac{\text{відм}}{\text{год}}.$$

Імовірність безвідмовної роботи конвеєра складає:

$$P(t) /_{t=10\text{год}} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-0,01 \cdot 10} = 0,904837.$$

Найвірогідніше значення похибки визначення імовірності безвідмовної роботи конвеєра складає:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sqrt{\sum \left( \frac{\partial P(t)}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{\partial P(t)}{\partial \lambda} \cdot \Delta \lambda \right)^2 + \left( \frac{\partial P(t)}{\partial t} \cdot \Delta t \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{-t} \cdot \Delta \lambda \right)^2 + \left( \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{-\lambda} \cdot \Delta t \right)^2} = \\ &= \sqrt{(0,000009048)^2 + 0} \approx \pm 0,000009. \end{aligned}$$

Тоді запишемо результат одноразового визначення імовірності безвідмовної роботи конвеєра:

$$P(t) /_{t=10\text{год}} = (0,904837 \pm 0,000009).$$

## ВИСНОВКИ

*У даному навчальному посібнику розглянуто:*

- різноманітні задачі експлуатації транспортних машин гірничих підприємств та їх розв'язання, які стосуються вимірювання параметрів транспортування насипних вантажів, вантажо й газових потоків, транспортних засобів, прогнозування характеристик експлуатації транспортних машин в різних умовах та визначення похибок вимірювань;

- загальні відомості про вимірювання, похибки вимірювань та поправки до них;

- перевірку статистичного розподілу результатів вимірювань на відповідність нормальному закону (закону Гауса) розподілу випадкової величини;

- попередню обробку результатів вимірювань, виявлення й усунення систематичних складових похибки результатів вимірювань, обчислення вірогідного значення вимірюваної фізичної величини та оцінення його точності;

- усунення інструментальної та методичної систематичної похибки вимірювання;

- загальні відомості математичної обробки результатів вимірювань;

- приділено задачам непрямого вимірювання та прогнозу параметрів стаціонарних транспортних машин з гнучким тяговим органом та параметрів руху самохідних машин, які враховують нові уявлення в області тертя тіл, розрахунку параметрів експлуатації стаціонарних транспортних машин з гнучким тяговим органом та руху самохідних машин й поїздів в режимі гальмування.

*З огляду на матеріал навчального посібника студент має уміти:*

- розв'язувати різноманітні задачі з експлуатації транспортних машин гірничих підприємств, які стосуються вимірювання параметрів транспортування насипних вантажів, вантажо й газових потоків, транспортних засобів, прогнозування характеристик експлуатації транспортних машин в різних умовах;

- мати загальні уявлення про вимірювання фізичних величин, похибки вимірювань та поправки до них;

- здійснювати перевірку статистичного розподілу результатів вимірювань на відповідність нормальному закону (закону Гауса) розподілу випадкової величини;

- здійснювати попередню обробку результатів вимірювань, виявляти й усувати систематичні складові похибок результатів вимірювань, обчислювати найвірогідніше значення вимірюваної фізичної величини та оцінювати його точність;

- знаходити відхилення результату вимірювання фізичної величини від її істинного значення, розрізняти її за способом вираження абсолютної й відносної похибок вимірювань, з деталізацією її складових, усувати інструментальні та методичні систематичні похибки вимірювань;

- здійснювати математичну обробку результатів вимірювань;

- при розв'язанні задач використовувати сучасні уявлення з функціонування та розрахунку параметрів експлуатації транспортних машин.

*Навчальна мета, яка сформульована вище, дає об'єктивну можливість однозначно судити про ступінь її досягнення для потенційного використання та втілення випускником отриманих знань з метрології в транспортування вантажів на гірничому виробництві.*

## Рекомендована література

1. Бакка М.Т. Метрологія, стандартизація, сертифікація і акредитація. Частина 1. Метрологія: навч. посіб. / М.Т. Бакка, В.В. Тарасова. – М-во освіти і науки України, Житомирський інженерно-технологічний інститут. - Житомир: ЖІТІ, 2002. – 337 с.

2. Бакка М.Т., Тарасова В.В. Метрологія, стандартизація, сертифікація і акредитація. Частина 2. Стандартизація, сертифікація і акредитація: навч. посіб. / М.Т. Бакка, В.В. Тарасова. – М-во освіти і науки України, Житомирський інженерно-технологічний інститут. - Житомир: ЖІТІ, 2002. – 384 с.

3. Головка Д.Б. Основи метрології та вимірювань: навч. посіб.: [для студ. вищ. техн. навч. закл.] / Д.Б. Головка, К.Г. Реґо, Ю.О. Скрипник. – К.: Либідь, 2001. – 408 с. – Бібліогр.: с. (48-69, 286-289).

4. Стандарт вищого навчального закладу. Кваліфікаційні роботи випускників. Загальні вимоги до дипломних проектів та дипломних робіт / Упорядн.: В.О. Салов, О.М. Кузьменко, В.І. Прокопенко. – Дніпропетровськ: Національна гірнича академія України, 2002. – 52 с.

5. Маркин Н.С. Метрология. Введение в специальность: учебн. пособ. для техникумов / Н.С. Маркин, В.С. Ершов. – М.: Издательство стандартов. 1991. – 208 с.

6. ДСТУ 2681-94. Державний стандарт України. Метрологія. Терміни та визначення. – К.: Держстандарт України. – 68 с.

7. Транспорт на горных предприятиях / Под общей ред. проф, Б.Л. Кузнецова. - М.: Недра, 1976, - 552 с.

8. Біліченко М.Я. Основи теорії та розрахунки засобів транспортування вантажів шахт: навч. посіб. / М.Я. Біліченко. – М-во освіти і науки України, Національний гірничий університет. – Д.: НГУ, 2002. - 102 с.

9. Біліченко М.Я. Збірник задач з дисципліни «Основи теорії транспорту»: навч. посіб. / Н.Я. Біліченко, Е.А. Коровяка, П.А. Дячков, В.А. Расцветаев. – М-во освіти і науки України, Національний гірничий університет. – Д.: НГУ, 2007. - 152 с.

10. Лубенец Н.А. Учет влияния поперечного размера гибкого тягового органа в реализации силы тяги трением / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2008. – № 10. С. 64 – 66.

11. Лубенец Н.А. Альтернативный формуле Эйлера закон реализации тягового усилия трением / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2008. – № 11.- С. 67 – 70.

12. Лубенец Н.А. Зависимость натяжения идеальной нити вдоль линии контакта с неподвижным блоком при скольжении / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2010. – № 9-10. - С. 27 – 32.

13. Лубенец Н.А. Прямой метод определения коэффициента трения конвейерной ленты о барабан при скольжении / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2010. – № 11-12. - С. 30 – 35.

14. Лубенец Н.А. Влияние центробежных сил гибкого тела на реализацию тягового усилия трением / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Науковий вісник НГУ.– Дніпропетровськ, 2012. – № 5. - С. 28 – 33.

15. Лубенец Н.А. Новое решение классической задачи Эйлера о скольжении гибкого тела по неподвижному блоку / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2014. - № 3. – С. 45 -53.

16. Лубенец Н.А. Форма сечения гибкого тела при скольжении по неподвижному блоку / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2015. - № 5. - С. 53 –

17. Лубенец Н.А. Экспериментальное определение фрикционных свойств гибкого тела при скольжении по блоку / Н.А. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2016. – № 1. – С. 58 – 62. (англ.)

18. Лубенец Н.А. Передача тягового усилия гибкому телу / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Дніпропетровськ, 2012. – № 38. – С. 70 – 78.

19. Коровяка Е.А. Обоснование режимов эксплуатации ленточных конвейеров горных предприятий / Е.А. Коровяка, Т.Н. Лубенец // Наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Дніпропетровськ, 2015. – № 49. – С. 116 – 121.

20. Лубенец Н.А. Определение тяговой способности карьерных конвейеров. / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец: // Сетевое периодическое научное издание «Проблемы недропользования». – Екатеринбург, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела Уральского отделения Российской академии наук, 2014. – Выпуск 2. – С. 102 – 109.

21. Лубенец Н.А. Скольжение объемного гибкого тела по блоку / Н.А. Лубенец // Наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Дніпропетровськ, 2015. – № 48. – С. 154 – 162.

22. Лубенец Н.А. О фрикционных свойствах гибких тел / Н.А. Лубенец // Наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Дніпропетровськ, 2015. – № 49 – С. 122 – 130.

23. Лубенец Н.А. Сохранение механической энергии гибкого тела при трении по блоку / Н.А. Лубенец // Наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Дніпропетровськ, 2017. – № 50. – С. 194 – 202.

24. Лубенец Н.А. Общий закон о трении тел в реализации силы тяги транспортными машинами с гибким тяговым органом. / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец: // Сетевое периодическое научное издание «Проблемы недропользования». – Екатеринбург, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела Уральского отделения Российской академии наук, 2017. – Выпуск 1. – С. 166 – 173.

25. Лубенец Н.А. Режим торможения поезда. / Н.А. Лубенец, Т.Н. Лубенец // Науковий вісник НГУ. – Дніпропетровськ, 2012. – № 6. – С. 41 – 46.

26. Лубенец Н.А. Новое уравнение трения гибких тел и общий закон о трении в эксплуатации транспортных машин с гибким тяговым органом. / Н.А. Лубенец // ПРР, наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Национальный горный университет, 2017. – Выпуск 11, № 4. – С.104 – 110.

27. Коровяка Е.А. Обоснование метода построения диаграммы натяжения горизонтального ленточного конвейера. / Е.А. Коровяка, Т.Н. Лубенец // ПРР, наук.–техн. сб. наукових робіт НГУ. – Национальный горный университет, 2017. – Выпуск 11, № 3. – С.111 – 116.

28. Пат. на корисну модель № 80236 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення сили тертя між гнучким тілом та барабаном / М.О. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № u 2012 10402; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

29. Пат. на корисну модель № 80232 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення сили тертя між гнучким тяговим органом та барабаном / М.О. Лубенець, Т.М. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № u 2012 10396; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

30. Пат. на корисну модель № 80237 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення сили тертя між ниткою та барабаном / М.О. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № u 2012 10403; заявл. 03.09.2012; опубл.



27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

31. Пат. на корисну модель № 80230 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення нормальної реакції між гнучким тілом та барабаном / М.О. Лубенець, Т.М. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № у 2012 10393; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

32. Пат. на корисну модель № 80235 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення нормальної реакції між ниткою та барабаном / М.О. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № у 2012 10401; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

33. Пат. на корисну модель № 80233 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення натягування гнучкого тіла уздовж лінії контакту з барабаном / М.О. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № у 2012 10398; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

34. Пат. на корисну модель № 80231 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення коефіцієнта тертя між гнучким тілом та барабаном / М.О. Лубенець, Т.М. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № у 2012 10394; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

35. Пат. на корисну модель № 80234 Україна, UA МПК G01N 19/02 (2006.01). Спосіб визначення коефіцієнта тертя між ниткою та барабаном / М.О. Лубенець; ДВНЗ «Національний гірничий університет». - № у 2012 10399; заявл. 03.09.2012; опубл. 27.05.2013, Бюл. 10. – 4 с.: кресл.

Лубенець Микола Олексійович,  
Коровяка Євген Анатолійович,  
Лубенець Тетяна Миколаївна

МЕТРОЛОГІЯ, СТАНДАРТИЗАЦІЯ ТА СЕРТИФІКАЦІЯ.  
ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МЕТРОЛОГІЇ НА ТРАНСПОРТІ

Навчальний посібник

для студентів спеціальності 6.090301 *Гірництво*  
(бакалавр, магістр)

Редактор .....

Підписано до друку \_\_\_\_\_. Формат 30x42/4.  
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк. 1,7.  
Обл.-вид. арк. 1,7. Тираж .... прим. Зам. №

Державний ВНЗ «Національний гірничий університет»  
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19.